

Jeodezi-1

KÜRE YÜZEYİNDE UYGULAMALAR

Prof. Dr. Sebahattin BEKTAŞ

2021



Jeodezi-I

KÜRE YÜZEYİNDE UYGULAMALAR

ISBN: xxxx

© 1. Basım, Ekim 2021

© Copyright 2021, ATLAS AKADEMİ

Bu baskının bütün hakları Atlas Akademi'ye aittir.
Yayınevinin yazılı izni olmaksızın kitabın tümünün veya bir kısmının elektronik, mekânîk ya da fotokopi yoluyla basımı, yayımı, çoğaltımı ve dağıtımı yapılamaz.

SERTİFİKA NO: 49704

Kapak & Dizgi
Atlas Akademi

Baskı ve Cilt
Dizgi Ofset
Yeni Matbaacılar Sitesi Konya
Tel: 0332 342 07 42

KÜTÜPHANE BİLGİ KARTI

Yazar:

BEKTAŞ, Sebahattin

Anahtar Kelimeler:

Jeodezi, Kürede Jeodezik Hesaplamalar, Küresel Koordinat Sistemleri
Küre Yüzeyinde Kestirme Hesapları, Harita Projeksiyonları



Akademi Mah. Yeni İstanbul Cad.
No: 22 Selçuklu / KONYA
Tel: 0332 241 30 59

ÖNSÖZ

Jeodezi-I kitabı, Üniversitelerin Mühendislik Fakültelerinin Harita (Geomatik) Mühendisliği Bölümlerinde ve Meslek Yüksekokullarının Harita-Kadaastro programlarında gösterilen Jeodezi, Küresel Trigonometri adı altında okutulan derslere yönelik olarak hazırlanmıştır. Bu kitap her ne kadar öğrenciler için düşünülüp hazırlanmışsa da direkt ya da dolaylı olarak jeodezi (haritacılık) faaliyetlerinde bulunacaklar için sürekli bir başvuru kaynağı olarak da kullanılabileceği ümit edilmektedir.

Son yıllarda bilgisayar teknolojisinde ve ölçme aletlerindeki gelişmeler jeodezide çığır açmıştır. Özellikle GNSS teknolojisi sayesinde yüksek doğruluk ve hızda, noktaların direkt konumları belirlenebilmektedir. Önceleri hesaplamalardaki güçlükler nedeniyle yeğlenen grafik ve yaklaşık çözümler, bilgisayarın sağladığı geniş, hızlı ve doğru işlem yapma yeteneklerinden dolayı yerlerini kesin çözüm yöntemlerine bırakmıştır. Böylelikle jeodezik hesaplamalar gerçeğe daha yakın bir biçimde yapılabilmektedir.

Kitap 5 bölümden oluşturulmuştur. Kitap da sırasıyla; Giriş ve Temel Tanımlar, Kürede jeodezik hesaplamalar, Küresel Koordinat sistemleri, Küre yüzeyinde kestirme hesapları, Harita Projeksiyonları konuları teorik açıklamalı ve sayısal uygulamalı olarak verilmiştir.

Kitabın konuyla ilgilenecekler yararlı olmasını diler, basımda emeği geçenlere teşekkür ederim.

Prof. Dr. Sebahattin BEKTAŞ
Eylül, 2021-Samsun

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	iii
İÇİNDEKİLER.....	v
1. GİRİŞ	1
1.1. Temel Bilgiler ve Tanımlar	1
1.2. Jeodezinin Ödevleri.....	2
1.3. Dünyanın Şekli ve Büyüklüğü.....	3
1.4. Potansiyel Teorisi.....	14
1.5. Gravite	15
1.6. Haritacılıkta (Jeodezide) İndirgemeler	21
2. KÜREDE JEODEZİK HESAPLAMALAR	23
2.1. Ölçülerin Küre Yüzeyine İndirgenmesi	23
2.2. Küre Geometrisi.....	24
2.3. Küre Üzerinde Bazı Büyüklüklerin Hesabı.....	25
2.4. Küre Üzerinde Özel Eğriler	27
2.4. Küre Yüzeyinde Üçgen Hesabı.....	30
2.6. Küresel Trigonometri Teoremleri	32
2.7. Küresel Üçgenlerin Çözümleri	34
3. KÜRESEL KOORDİNAT SİSTEMLERİ.....	41
3.1. Coğrafi Koordinatlar	41
3.2. Kartezyen (Global, Geosentrik) Koordinat Sistemi.....	45
3.3. Küresel Jeodezik Dik Koordinat Sistemleri	47
3.4. Soldner Sisteminde Temel Ödev Çözümleri	50
3.5. Soldner Sisteminde Temel Ödevlerin Serilerle Çözümü	52
4. KÜRE YÜZEYİNDE KESTİRME HESAPLARI	65
4.1. Kürede Önden (İleriden) Kestirme	65
4.2. Kürede Geriden Kestirme.....	68
4.3. Kürede Jeodezik Hesaplamaların Düzlem Esaslara Göre (İndirgemeyle) Yapılması.....	70
4.5. Küre Yüzeyinde Poligon Hesabı.....	83
4.6. Soldner Sisteminde Komşu Dilimler Arasında Koordinat Dönüşümü	87

5. HARİTA PROJEKSİYONLARI	89
5.1. Projeksiyonların Sınıflandırılması	89
5.2. Kürenin Düzleme Ordinat Koruyan (Cassini-Soldner Projeksiyonu) Projeksiyonu	91
5.3. Kürenin Düzleme Gauss – Krüger (Konform) Projeksiyonu	97
5.4. Küresel Coğrafi Koordinatlardan Gauss-Krüger Koordinatlarının Hesabı	100
5.5. Ordinat Koruyan ve Gauss-Krüger Projeksiyonların Karşılaştırılması	107
KAYNAKLAR	111

1. GİRİŞ

1.1. Temel Bilgiler ve Tanımlar

Jeodezinin Tanımı ve Tarihçesi

İlk çağlardan günümüze kadar, bir yandan insanoğlunun üzerinde yaşadığı dünyanın şekil ve büyüklüğünü öğrenme merakı, diğer yandan savunma, ulaşım, bayındırlık ve kadastral hizmetlerin yürütülmesi için gerek duyulan harita yapımı ve uygulaması çabaları jeodezi biliminin doğma ve gelişmesine neden olmuştur. Jeodezinin uygarlık tarihinin ilk mesleklerinden olduğu tartışma götürmemektedir. M.Ö. 2400 yıllarında Mısır'da Nil nehri çevresinde yaşayan insanların, Nil nehrinin taşması sonucu ekilen arazilerinin zarar görmesi ve arazi sınırlarının yeniden belirlenmesi çalışmalarından (mülkiyet kadastrosu) ilk jeodezik faaliyet olarak bahsedilmektedir. Aynı dönemde ilk dünya haritası Babilliler tarafından bir tablet üzerine çizilmiştir. Bu tarihten günümüze kadar jeodezi bilimi bilimsel ve teknolojik gelişmelere bağlı olarak pek çok gelişme geçirmiştir. Bugün jeodezi uydu tekniklerini ve bilgi sistemlerini yaygın olarak kullanan bir noktaya gelmiştir. Jeodezi kelimesi köken olarak; *jeo: yer, dezi: ölçmek, bölmek* anlamına gelen iki kelimenin birleşmesinden ortaya çıkmıştır. Ancak buradaki *-dezi* son ekinin Jeodezi kelimesi dışında hemen hemen hiç kullanılmaması Jeodezinin kamuoyu tarafından anlaşılmasını olabildiğince engellemiş ve uzun yıllar jeodezi kelimesinin ülkemizde yeterince anlaşılmasına neden olmuştur. Jeodezi basit tanım olarak yer ölçüsü anlamına gelmektedir. Jeodezinin daha genel tanımı için, yeryuvarının tamamının ya da bir parçasının zamana bağlı olarak şeklini, büyüklüğünü ve çekim alanını belirlemeyi amaç edinmiş bir bilim dalıdır diyebiliriz. Bu tanımlamadan jeodezinin iki temel görevinin olduğu ortaya çıkmaktadır. Bunlardan birincisi kapsam olarak matematik jeodeziye giren yeryuvarının şekli ve büyüklüğünü belirlemek, pratik anlamda yeryuvarının tamamının ya da belli bir parçasının bir ölçek dahilinde küçültülüp bir altlık üzerinde gösterilmesidir. Diğer ise fiziksel jeodeziye giren yerçekimi-gravite vektörünün büyüklüğünü ve yönünü (çekül doğrultusunu) belirlemektir. Jeodezinin bu iki temel görev alanının sınırlarını kesin olarak birbirinden ayırmak mümkün değildir. Örneğin tüm jeodezik ölçümlerde çekül doğrultusunun referans alınması fiziksel jeodeziyi matematik jeodezinin içine sokmaktadır.

Fiziksel yeryüzünün tamamının veya bir parçasının şeklinin ve büyüklüğünün belirlenmesi ya da diğer bir deyişle haritasının çıkarılması için yeryüzünde yeter sıklıkta ve doğrulukta noktaların konumlarının (üç boyutlu koordinatlarının) belirlenmesi gerekir. Bu konum belirleme işlemi dünya için seçilecek bir üç boyutlu dik koordinat sistemi üzerinde gerçekleştirilebilir. Buna *üç boyutlu jeodezi* (3B) diyoruz. GPS uygulamalarının giderek yaygınlaşması 3B jeodeziyi daha güncel hale getirmektedir. Konum belirleme probleminin diğer bir çözümü de klasik parçalı yaklaşımdır. Klasik parçalı yaklaşımda (2B+1B), yatay konum ve düşey konum ayrı ayrı belirlenir. Önce yeryüzündeki noktalar seçilen bir referans yüzeyine (elipsoid, küre, teğet düzlem) izdüşürülür ve yapılan doğrultu ve uzaklık ölçülerinden yararlanarak noktaların bu referans yüzeyi üzerindeki yatay konumları (2B) belirlenir. Noktaların düşey konumları (1B) için söz konusu izdüşüm noktaları ile asıl noktalar arasındaki uzaklıklar ayrıca belirlenir. Pratik gereksinimler için klasik parçalı yaklaşım yöntemleri günümüzde de geçerliliklerini korumaktadırlar. Bu kitabın kapsamı genel olarak (2B) jeodezi tekniklerini içermektedir.

1.2. Jeodezinin Ödevleri

Hemen hemen tüm disiplinlerde olduğu gibi Jeodezinin ödevlerini de iki grupta toplayabiliriz[12]. Bu grupların birincisinde diğer disiplinlerle ortak yürütülen faaliyetler ikinci grupta da salt jeodezicilerin yürüttüğü faaliyetler yer almaktadır.

I. grupta jeodezinin katkısıyla ve diğer disiplinlerle ortak yürütülen faaliyetler olarak;

- Toplu halde yaşama ilkesine yönelik *Toplumsal faaliyetler* (Savunma, kadastro, imar uygulaması, arazi toplulaştırması)
- Doğayı tanımaya yönelik *Bilimsel faaliyetler* (Dünyanın şekli, büyüklüğü ve gravite alanının belirlenmesi, yer dinamiği problemleri gibi)
- Doğayı yeniden düzenlemeye yönelik *Teknolojik faaliyetler* (Yol, baraj, içme suyu, enerji iletimi, kanalizasyon, sulama ve kurutma faaliyetleri gibi)

II. grupta yalnızca jeodezik faaliyetler olarak;

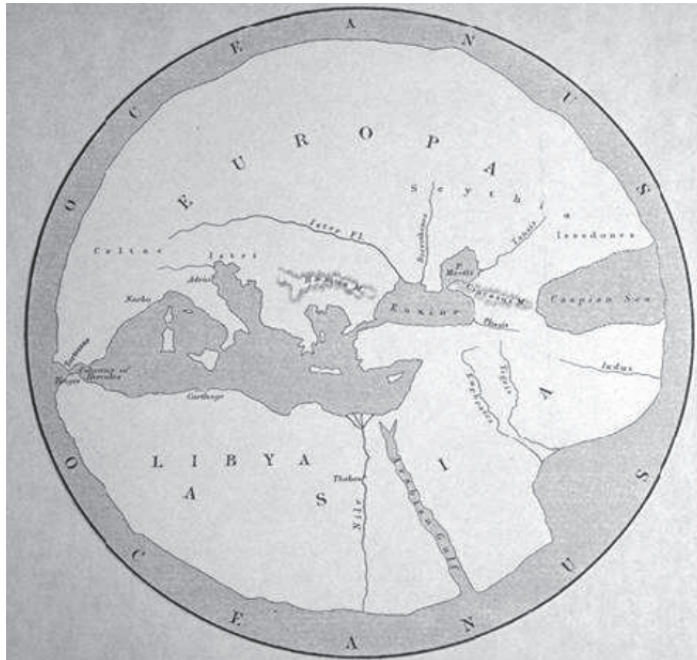
- Temel ağların(nirengi, nivelman, gravite) kurulması ve yaşatılması
- Temel haritaların yapımı ve güncelleştirilmesi
- Jeodezik veri tabanı CBS(coğrafi bilgi sistemi) oluşturma ve sürdürme sayılabilir.

1.3. Dünyanın Şekli ve Büyüklüğü

İlk çağlardan beri insanların üzerinde yaşadıkları doğayı tanıma meraklarından dolayı dünyanın şekli ve büyüklüğü konusu ilgisini çekmiştir. İnsanların doğayı tanıma merakları bilimsel faaliyetlerin odak noktasını oluşturmuştur. Gerçekten de bugün pek çok bilim dalı, doğayı, doğadaki olayların neden ve sonuçlarını araştırmakta ve bunları kurallara bağlamaya çalışmaktadır.

Gerek bilimsel amaçlara, gerekse pratik amaçlara yönelik olsun jeodezik çalışmaların değerlendirilebilmesi için yeryüzünün gerçek şekline bir model kabul etmek ve bu modelin tanımını yapmak gerekir. Yeryüzünün modeli olarak, yerin atmosfer ile arakesitini almak mümkün değildir. Her ne kadar dünya denizleri (okyanuslar) düzenli bir şekil gösteriyorsa da çeşitli engebeleri olan kara parçalarında böyle bir düzen yoktur. Yeryüzünün modeli olarak alınacak yüzeyin yerin fiziksel yapısına uygun olması, matematik olarak ifade edilebilmesi ve ölçü işlemleri ile bağlantısının kolay olması gibi özellikler beklenir[4],[6], [20].

İlk çağlardan günümüze kadar dünyanın şekli hakkındaki varsayımlar değişik aşamalar geçirmiştir. Yeryuvarının şekli olarak tarihsel süreç içinde sırayla düzlem, küre, elipsoid ve jeoid şekilleri alınmıştır [25]. M.Ö.2400 yıllarında Babillilere göre dünyanın şekli etrafı denizlerle çevrili bir daire, disk (düzlem) olarak kabul edilmiştir. Bu tarihlerde Hecetaeus (M.Ö.550-500) yapmış olduğu ilk harita Şekil-1 de görülmektedir.



Şekil -1 Hecetaeus'un dünya haritası

Yunanlı astronom ve coğrafyacı Batlamyus'un (Ptolemy) (87-151) yazdığı 13 ciltlik Almagest ölümünden sonrada çok uzun süre astronomlara el kitabı oldu. 827 de Arapçaya 12.yüzyılda latinceye çevrildi. Bugünkü anlamda eski çağ dünyasının ilk haritasını (şekil- 2) yaptı.



Şekil-2 Ptolemyus'un ilk dünya haritası

Tarihsel süreç içinde pek çok dünya haritası yapılmıştır. Bunlardan bizim için en önemlilerinden bir tanesi hiç şüphesiz Kanatlı at (pegasus) şeklinde yapılan dünya haritasıdır (şekil-3).

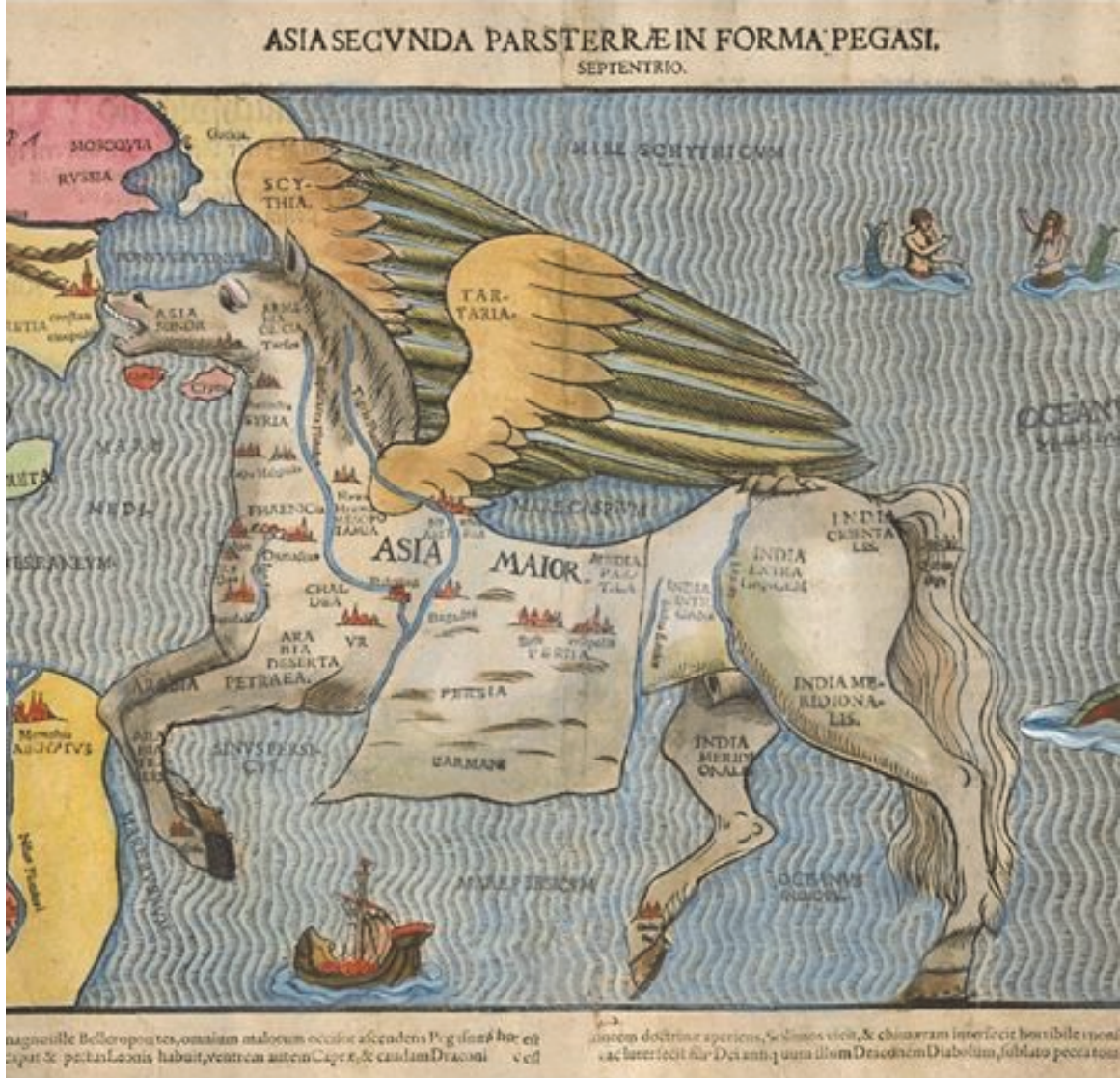
“Dörtmala gelip Uzak Asya'dan,

Akdeniz'e bir kısrak başı gibi uzanan,

bu memleket, bizim.” (Nazım Hikmet, Davet, 1929)

Haritada gözünüze çarpan ilk şey kanatlı at oldu, öyle değil mi? Resmin altında belirtildiği gibi o aslında bir harita, daha da önemlisi eski Asya'yı gösteren bir harita. İlk dikkatinizi çeken kanatlı atın ismi Pegasus ve bizimle iki alakası var:

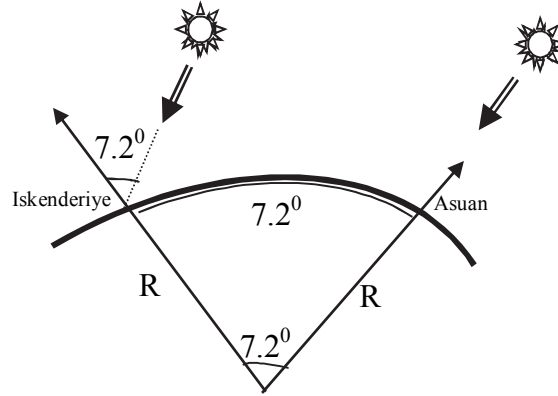
Birincisi Pegasus; Yunan mitolojisinde ilham götüren varlık olarak bilinir. Ama sadece şairlere. Bir diğeri de Pegasus'un başının olduğu yer Anadolu... İki farklı insan, iki farklı zamanda birbirlerinden habersiz; biri dizelerine dökmüş Anadolu'yu, biri de beyaz tuvaline. Olur ya, belki Nazım gördü bu haritayı ondan ilham aldı, belki de Pegasus bu olanları biliyormuşçasına aktardı ilhamını Nazım'a...(Cansu Kömeç, Ortanca Dügme İliklemesi)



Şekil -3 (Heinrich Bünting: Mitolojik kanatlı at şeklinde Asya haritası. 1581.)

M.Ö.600 yıllarında Pisagor kardeşlerce, düzenli yüzeyler arasında en uygunun küre olması düşüncesi ile yerin şeklinin küre biçiminde olduğu ileri sürülmüştür. Aristoteles (M.Ö.384-322) de yapmış olduğu gözlemlerle dünyanın şeklinin küre olması gerektiğini ileri sürdü. Aristoteles; belirli bir yönde gidildiğinde ufkun

sürekli değişmesi, açık denizden karaya yaklaşan bir geminin önce bacasının sonra güvertesinin görünmesi ve ay tutulmasında dünyanın ay üstündeki gölgesinin daire yayı biçiminde olması gibi nedenlere dayalı olarak yerin şeklinin küre olduğunu ispatlamaya çalışmıştır. Dünyanın şekli olarak alınan kürenin yarıçapını ölçülere dayalı olarak belirleyen ilk bilgin Erastosthenes'tir (M.Ö.250). Erastosthenes'den sonra da daha birçok bilim adamı dünyanın şekli olarak kabul edilen kürenin yarıçapını belirlemek için çalışmalar yapmıştır.



Şekil -4

Erastosthenes, Bugün Mısır'da bulunan Asuan'da güneş ışınlarının yere tam dik geldiği anda ertesini yıl aynı anda İskenderiye'de güneş ışınlarının yere düşeyle 7.2° açı yaparak geldiğini ölçerek belirlemiştir. Yerin küre olduğu varsayımından hareketle bu açının İskenderiye ile Asuan kentini yerin merkezinde gören açı olduğu ortaya çıkar (şekil - 4). İki şehir arasındaki uzaklık o zamanki uzunluk ölçü birimi stadya ($1 \text{ Stadya} = 185m$) biriminden 5000 stadya olduğu belirlenmiştir. Bu durumda yeryuvarının yarıçapı,

$$\text{merkez açısı} = \text{yay} / \text{yarıçap} \quad \alpha = \frac{S}{R}$$

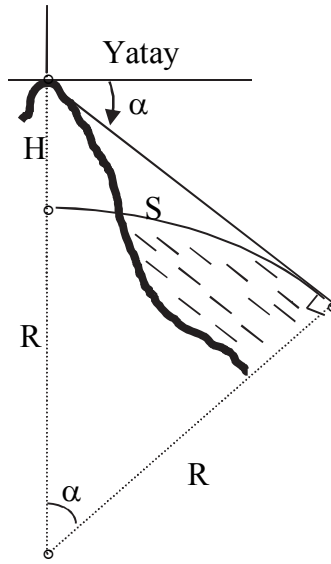
eşitliğinden dünyanın yarıçapı R

$$R = \frac{S}{\alpha} = \frac{5000 \text{Stadya}}{7.2^{\circ} / \rho^{\circ}} = 39789 \text{ stadya} = 7361 \text{ km.}$$

$$\rho^{\circ} = 180^{\circ} / \pi = 57.2958^{\circ} \quad (\text{dereceyi radyana çevirme katsayısı})$$

olarak belirlemiştir.

Yerin yarıçapı değişik bir şekilde de Biruni (983-1048) tarafından belirlenmiştir. Biruni, deniz kıyısında (H) yüksekliği belli olan bir tepede deniz ufkuna yapılabilen bir gözlemle yatay ile ufuk arasındaki ölçülebilen düşey açının (α) yeryuvarı merkezindeki açıya eşit olacağından hareketle yeryuvarı yarıçapının (şekil-5) den



Şekil - 5

$$\cos \alpha = \frac{R}{R+H} \Rightarrow R = \frac{H \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

biçiminde hesaplanabileceğini göstermiştir. Biruni bu işlemi Hint okyanusu kıyısında, denizden yüksekliği $H = 652$ arşın olan Zira-El-Sevda dağında yaparak α açısını $33'$ olarak ölçmüş ve yarıçapı 3333 Arap mili (6425.685 km) ve 1 derecelik meridyen yayı uzunluğunu 58.2 Arap mili (118.1 km) ve yerin çevresini 42516 km olarak hesaplamıştır. Ancak teorik dayanağı tam olan bu yöntem pratikte düşey açılar üzerindeki refraksiyon (ışın kırılması) etkisinin tam olarak giderilememesi yüzünden hatalı sonuçlar vermektedir.

Örnek: Deniz kıyısında yüksekliği H olan bir tepeden deniz ufkuna bakılıyor ve düşey açı değeri $Z=100.25^g$ olarak ölçülüyor. Buna göre tepenin H yüksekliğini bulunuz.

$$\cos \alpha = \frac{R}{R+H} \quad \left(H = \frac{R(1-\cos \alpha)}{\cos \alpha} = 49.117m \right)$$

Örnek: Deniz kıyısında boyu 170cm olan birisinin görebileceği ufuk mesafesini hesaplayın.

$$S = [(R+H)^2 - R^2]^{1/2} = (2HR)^{1/2} = 4653.816m$$

Yeryuvarının büyüklüğü karşılıklı düşey açı ölçümlerinden de yararlanarak belirlenebilir (şekil-6).

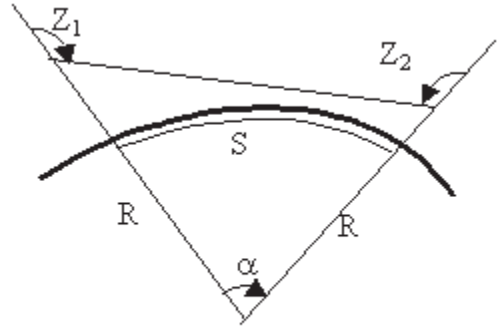
$$\alpha = Z_1 + Z_2 - 180^0$$

$$\alpha = \text{yay} / \text{yarıçap} = S / R \text{ den}$$

yeryuvarının yarıçapı

$$R = \rho^0 S / \alpha$$

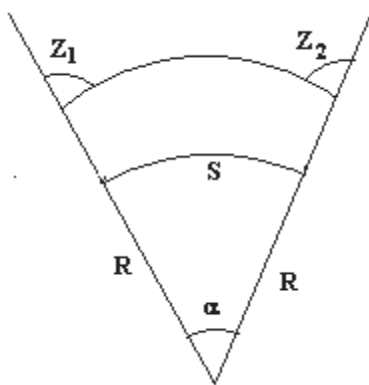
eşitliğinden bulunur.



Şekil-6

Bu yöntemle göre birbirini gören ve olabildiğince birbirinden uzak iki nokta arasında karşılıklı düşey açı ölçümleri (Z_1 , Z_2) ve noktalar arası yay uzunluğu (S) den yararlanarak bu S uzunluğuna karşılık gelen merkez açısı α bulunabilir. Ancak bu yöntemde de düşey açılar üzerindeki refraksiyon etkisi nedeniyle sağlıklı sonuçlar alınmamaktadır.

Örnek: Dünyanın yarıçapının yaklaşık olarak belirlenmesine yönelik olarak birbirinden 30km uzaklıktaki iki tepeden birbirine karşılıklı olarak düşey açı gözlemi yapılmış ve $Z_1=92^0 00' 00''$ ve $Z_2=88^0 16' 11''$ değerleri ölçülmüştür. Söz konusu ölçümlerden yararlanarak dünyanın yarıçapının belirleyiniz. Bu yöntemle yarıçap belirlemenin ne gibi sakıncaları olacağını irdeleyiniz.



$$\alpha = Z_1 + Z_2 - 180 = 16'11'' = 0,2697222^0$$

$$R = \frac{S}{\frac{\alpha}{\rho}} = 6372754,055\text{m}$$

Hata hesabı

Yarıçapın bu şekilde ölçülere dayalı olarak belirlenmesinde yapılacak hata doğrudan hesaplamada kullanılan ölçülerin hatalarıyla ilişkili olacaktır.

Diferansiyel olarak;

$$dR = \frac{1}{\alpha} dS - \frac{S}{\alpha^2} d\alpha$$

Hata yayılma kuralı uygulayarak

$$m_R^2 = \left(\frac{1}{\alpha} m_S \right)^2 + \left(\frac{S}{\alpha^2} m_\alpha \right)^2$$

bağıntılarından kolayca bulabiliriz.

Örnek: Yeryuvarı yarıçapının belirlenmesi için yapılan iki nokta arasındaki ölçüler ve ölçü hataları aşağıda verildiğine göre

$$S = 925 \text{ km. ölçülen yay boyu}$$

$$\alpha = (7.2^\circ / \rho^0) = 0.12566 \text{ rad. ölçülen merkez açısı}$$

$$m_S = \pm 500 \text{ m} \quad m_\alpha = \pm 0.5' = \pm 1.454 \times 10^{-4} \text{ rad. (karesel ortalama hatalar)}$$

Yarıçapı ve yarıçap belirleme işlemi sonucundaki hatayı hem diferansiyel olarak hem de hataların yayılma kuralına göre belirleyiniz ve sonuçları irdeleyiniz.

Çözüm:

Diferansiyel olarak hata hesabı yapabilmek için ölçü hatalarının işaretinin artı mı ya da eksi mi bilinmesi gerekir. Hataların işareti de bilince artık onlara hata demek de doğru olmaz artım demek daha doğru olur. Artımları ölçü hatalarının “+” işaretlileri olarak kabul edersek yarıçap hesabındaki artımı aşağıdaki gibi buluruz.

$$dS = +m_S = +500 \text{ m}$$

$$d\alpha = +m_\alpha = +1.454 \times 10^{-4} \text{ rad. (artımlar)}$$

$$R = \frac{S}{\alpha} = 7360.916 \text{ km}$$

$$dR = \frac{1}{\alpha} dS - \frac{S}{\alpha^2} d\alpha = 3.978 \text{ km} - 8.520 \text{ km}$$

$$dR = -4.54 \text{ km}$$

Yorum: yani uzunluk 500m artar ve merkez açısı da 0.5' artarsa yarıçapdaki değişim -4.54km olur. Dolayısıyla yarıçap değeri

$$R = 7360.916 - 4.54 = 7356.376 \text{ km}$$

olur. Gerçi biz bu durumda ölçülerin düzeltilmiş değerlerini kullanarak yarıçapın net hesabını da diferansiyel almadan da aşağıdaki gibi yapabiliriz.

$$R = \frac{S}{\alpha} = (925 + 0.5) \text{ km} / (0.12566 + 1.454 \times 10^{-4}) \text{ rad} = 7356.380 \text{ km}$$

$$fark = 7360.916 \text{ km} - 7356.380 \text{ km} = -4.536 \approx -4.54 \text{ km}$$

Hata yayılma kuralı uygulayarak yarıçapın karesel ortalama hatasını

$$R = \frac{S}{\alpha}$$

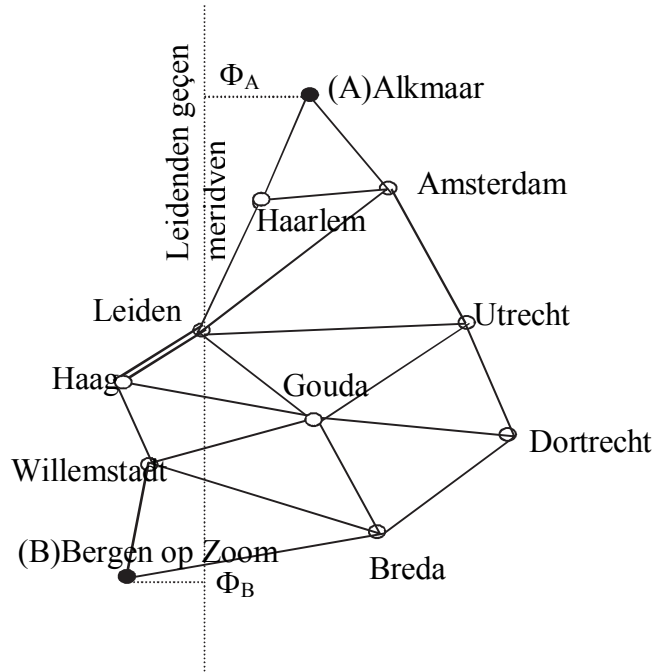
$$m_R^2 = \left(\frac{1}{\alpha} m_S \right)^2 + \left(\frac{S}{\alpha^2} m_\alpha \right)^2 = 15.831 \text{ km}^2 + 72.583 \text{ km}^2 = 88.414 \text{ km}^2$$

$$m_R = \pm 9.40 \text{ km}$$

olarak buluruz.

İrdeleme: Diferansiyel olarak hata hesabı yapmak doğru olmaz. Çünkü diferansiyel hesapta ölçü hataları değil ölçülerin diferansiyel artımları (dS , $d\alpha$) kullanılır. Diğer bir deyişle bu artımların işareti (artı mı? eksi mi?) bellidir. Oysa bizim ölçü hatalarımızın işareti \pm dir yani işaretleri belli değildir ve bir belirsizlik ifade ederler. Dolayısıyla ölçülerin hatası söz konusu ise hata hesaplamalarının mutlaka hataların yayılma kanununa göre yapılması gerekir.

Triyngölasyon



Şekil-7 Snellius'un triyngölasyon ağı

Yer yuvarının yarıçapını ölçümlere dayalı olarak belirlenmesi çalışmalarında dar boğazın uzunluk ölçüsünde olduğu görülmektedir. 1500-1600 yıllarındaki ölçme aletleri düşünüldüğünde, kilometrelerce uzunluğun belirli bir incelikte ölçülmesi oldukça zor, hatta olanaksız olacağı tahmin edilebilir. Bu dar boğaz triyagülasyon ile ortadan kaldırılmıştır. Bu yöntemle, birbirine göre çok uzakta olan iki nokta arasındaki uzaklık, araya kurulacak zincir üçgenler yardımıyla dolaylı olarak bulunabilmektedir. 1615'de Snellius tarafından Hollanda'da kurulan bu triyagülasyonun (şekil-7) açıları yarıçapı 2.5 ayaklık kuadrant denilen çeyrek daire yayı biçimindeki açı ölçü aleti ile ölçmüştür. Açı ölçmelerinde 2' (2 derece dakikası) direkt ve 1' da tahmin şeklinde okunmaktaydı. Bu üçgen zincirinin bir kenarı Haag-Leiden arası baz olarak 87.05 rute bulunmuştur (1 rute = 3,767m). Zincirin en kuzey ve en güneyindeki Alkmaar ve Bergen op Zoom'da yapılan astronomik gözlemlerle bu noktaların enlemleri hesaplanmıştır.

Bu enlem değerleri,

$$\Phi_A = 52^{\circ} 40' 30'' \quad \text{ve} \quad \Phi_B = 51^{\circ} 29' 00''$$

olup, bu iki nokta arasındaki enlem farkı $\Delta\Phi = 1^{\circ} 11' 30''$ dir. Triyagülasyon yardımıyla bu yaya ait meridyen uzunluğu 33930 rute, buradan yeryuvarının çevresi 38640km olarak bulunmuştur. Benzer yöntemle 1669-1670 yıllarında Picard, Malvoisine ile Amiens arasına (Paris meridyeni) 13 üçgenlik bir zincir döşeyerek 1 derecelik meridyen boyunu 111.211km. buna göre yeryuvarının çevresi 40035.96 km ve yeryuvarının yarıçapını da 6371.921km olarak bulmuştur.

17. yüzyılın ortalarına kadar yerin şekli küre şeklinde sanılıyorken, iki Hollandalı fizikçi Huygens ve hemen sonra Newton, yerin kendi eksenini etrafında dönmesinin, şeklini etkileyeceği, böylece bu şeklin kutuplarda basık bir küre yani, dönел elipsoid olması gerektiğini ileri sürmüşlerdir. Fransız Bilimleri Akademisi fizikçilerin bu iddialarını ispatlamak için farklı enlemlerde meridyen yay boylarının ölçümüne karar verdi. Cassini ailesi tarafından gerçekleştirilen yay boyu ölçümlerinden beklenenin tam tersine 1 derecelik yay boyunun kutuplara doğru azaldığı ortaya çıkmıştı bu ölçümlere göre dünya kutuplardan değil de ekvatorun basık oluyordu. Kısa sürede bu çelişkinin yapılan bir hesap hatasından kaynaklandığı anlaşılmıştı. Akademi tarafından yeniden Laponya ve Peru'ya gönderilen iki ekibin yaptığı meridyen yayı ölçmeleri sonucu dünyanın şeklinin kutuplarda basık bir elipsoid olduğu yeniden kanıtlanmıştır.

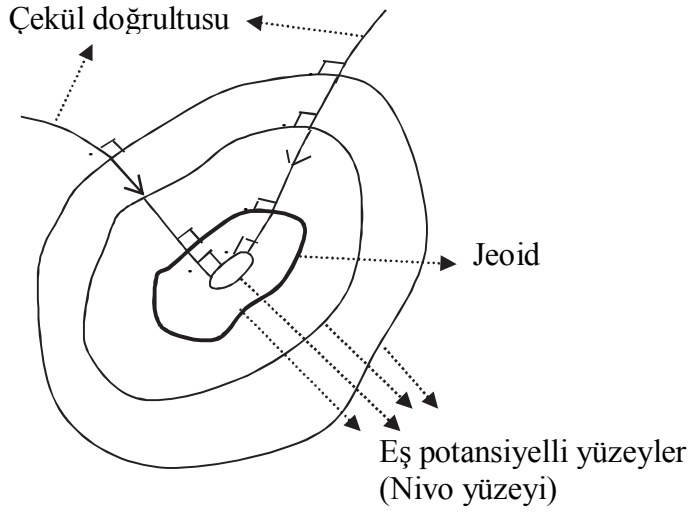
18.yüzyıl ortalarında elipsoid üzerinde yapılan hesapların ölçü inceliğinin ötesinde bazı çelişkiler göstermesi sonucu, yeryuvarının şekli olarak elipsoidin de yeterli bir tanım olamayacağı anlaşılmıştır. Bu konuda diğer önemli bir kanıt da çekül

sapmalarıdır. Bilindiği gibi çekül sapması bir noktada elipsoid normali ile çekül doğrultusu (jeoid normali) arasındaki açıdır. Yapılan jeodezik ve astronomik ölçüler elipsoid normallerinin çekül doğrultusunda olmadığını göstermiştir. Bu amaçla 1873 yılında *Listing* tarafından yeryüzüne en uygun şekil olarak *Jeoid* tanımlanmıştır.

JEOİD: Rüzgar, dalga, gel-git, ısı değişimi, akıntılar gibi dış bozucu etkilerden arınmış olarak düşünülen ortalama okyanus yüzeyinden ve bunun karalar içinde de devam ettiği varsayılmasıyla oluşan kapalı bir denge yüzeyidir.

Bir eşpotansiyelli yüzey (nivo yüzeyi) olan jeoidin şeklini yerin çekim kuvveti belirler. Çekim kuvvetinin doğrultusunu her noktada bir çekülle belirleme olanağı vardır. Jeoid her noktasında çekül doğrultusuyla dik açı yapar. Yerin kitle dağılımı düzensiz olduğu için buna bağlı olan çekül doğrultuları da düzensizdir ve bunun sonucu olarak çekül doğrultularına dik jeoid yüzeyi basit geometrik bir yüzey olmakla beraber şekil yönünden genel olarak bir dönel elipsoid yüzeyinden çok farklı olmayan bir yüzeydir. Helmert bir jeoid yüzeyi ile onun yerine alınacak bir elipsoid yüzeyi arasında en çok 100 m. yükseklik farkı olabileceğini söylemiştir. Dünya için kabul edilen referans elipsoidi ile jeoid arasında her noktada değişen yükseklik farkı vardır. Eksi ve artı olabilen bu farklara jeoid yüksekliği (jeoid ondülasyonu) denir ve N_j ile gösterilir.

Çeşitli iç ve dış kuvvetlerin etkisiyle jeoidin ondülasyonlu bir yapısı vardır. Son yıllarda yapılan uydu gözlemlerinden, Hint Okyanusunda deniz düzeyinin ortalama deniz düzeyinden yaklaşık 100m daha alçak olduğu tespit edilmiştir. Bu çöküntüde olan bir gemi yerin merkezine 100m daha yakındır. Geminin çöküntüyü terk edebilmesi için 100m yükseklikli bir dağa tırmanması kadar ek bir güç harcaması gerektiği akla gelebilir. Ancak deniz düzeyinin eş potansiyelli yüzey (nivo yüzeyi) oluşu nedeniyle gemi hiçbir ek güç harcamadan bu çöküntüyü terk eder.



Şekil-8: Eşpotansiyelli Yüzeylerin Gösterimi

Çekim kuvvetinin (gravitenin) doğrultusunu her noktada bir çekülle belirlemek mümkündür. Yeryüzünün büyük kısmının % 73'ünün okyanuslarla kaplı oluşu ve doğada gözle görülebilmesi eş potansiyelli yüzeylerden jeoidin yeryüzünün şekli olarak alınmasını daha da anlamlı kılmaktadır. Eş potansiyelli yüzeyler birbirini kesmez, sürekli ve yuvarlaktırlar (köşesizdirler). Eş potansiyelli yüzeyler yer kitlelerinin homojen yoğunlukta olmaması nedeniyle birbirlerine paralel değildirler.

Eş potansiyelli yüzeyin her noktasında potansiyel sabittir. Dengeye bulunan durgun su yüzeyi bir eş potansiyelli yüzeydir. Dünyada sonsuz sayıda eş potansiyelli yüzey düşünülebilir (şekil-8). Örneğin deniz seviyesinden yüksekteki bir krater gölünün su yüzeyi de eş potansiyelli bir yüzeydir.

Eş potansiyelli yüzeyler her noktasında çekül doğrultusuyla dik açı yapar. Eş potansiyelli yüzey olan jeoidin şeklini yerin çekim kuvveti belirler.

Tüm eş potansiyelli yüzeyleri normal olarak(dikine) kesen eğriler tam doğru olmayıp, hafifçe eğridirler. Bunlara **çekül eğrileri** denir. Herhangi bir noktadaki gravite vektörü bu noktadaki çekül eğrisine teğettir.

Yeryüzüne en uygun şekil, matematiksel ve fiziksel kavramlarla tanımlanabilen *jeoid* dir. Yani jeoid geometrik bir yüzey değil fiziksel bir denge yüzeyidir.

1.4. Potansiyel Teorisi

Çekim ve Potansiyel:

Newton çekim yasasına göre bütün cisimler birbirlerini kütlelerinin büyüklüğüyle doğru orantılı aralarındaki uzaklığın karesiyle ters orantılı olacak şekilde çekerler. Newton çekim yasasına göre kütleleri m_1 ve m_2 aralarındaki uzaklık l olan iki cisim G kuvvetiyle birbirlerini çekerler,

$$G = -k \frac{m_1 m_2}{l^2}$$


Bu G kuvveti cisimleri birleştiren doğru boyuncadır. k ' ya newton çekim sabiti denir ve değeri $k = 66.7 \times 10^{-9} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ sn}^{-2}$ dir. Her ne kadar m_1 ve m_2 kütleleri birbirini tam bir simetri ile çekerlerse de geleneksel olarak bunlardan birine çeken, diğerine de çekilen kütle adı verilir. Kolaylık sağlaması amacıyla burada çekilene birim kütle çekene de yalnızca m denecektir.

$$G = -k \frac{m}{l^2}$$

formülü m kütlelerinin kendisinden l kadar uzaklığındaki bir birim kütle üzerine uyguladığı kuvveti vermektedir. Çekim potansiyeli adı verilen skaler fonksiyon

$$V = k \frac{m}{l}$$

olur. Çekim kuvveti G nin bileşenleri

$$G = (x, y, z) = \text{grad } V$$

şeklinde yazılır. Böylece kuvvet vektörü skaler fonksiyon V nin gradiyent vektörü olur. Eğer m_1, m_2, \dots, m_n gibi nokta kütlelerinden oluşan bir sistem söz konusu ise, bu sistemin potansiyeli her bir nokta kütlelerinin katıldığı bir toplam olan

$$V = k \frac{m_1}{l_1} + k \frac{m_2}{l_2} + \dots + k \frac{m_n}{l_n} = k \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{l_i}$$

ile verilir. Hacim elemanı dv , kütle elemanı da dm olmak üzere yoğunluğun

$$\rho = \frac{dm}{dv}$$

şeklinde tanımlandığı bir v hacmi içinde nokta kütlelerinin kesiksiz bir dağılımı olduğu düşünülürse toplam potansiyel

$$V = k \iiint_V \frac{dm}{l} = k \iiint_V \frac{\rho}{l} dv$$

şeklinde integrale ifade edilir. Buradaki l , kütle elemanı $dm = \rho dv$ ile çekilen nokta arasındaki uzaklıktır.

1.5. Gravite

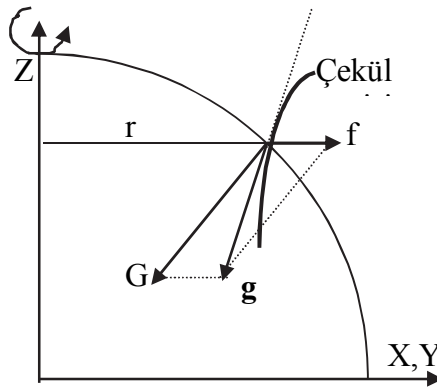
Yeryüzünde duran bir cisme etki eden kuvvet, Newton çekim yasasına göre oluşan bir çekim kuvveti ve yeryuvarının kendi eksenini etrafında dönmesiyle oluşan merkezkaç kuvvetin bileşkesidir. Bu iki kuvvetin bileşkesi o noktadaki *gravite* vektörünü verir. Bilindiği gibi gravite vektörü o noktadaki çekül eğrisinin teğettir (Şekil-9).

Merkezkaç kuvvet: Bir birim kütle üzerindeki merkezkaç kuvvet f , yeryuvarının kendi eksenini etrafında dönüşünün açısal hızı w ile kütlelerin dönme eksenine olan dik uzaklığı

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ olmak üzere}$$

$$f = w^2 r$$

şeklinde tanımlanır.



Şekil-9 Gravite Vektörü

Merkezkaç kuvvet aynı zamanda $F = \frac{1}{2} w^2 r^2$ şeklinde bir potansiyelden de türetilebilir.

$$\vec{f} = \text{grad}F \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

Çekim kuvveti ile merkezkaç kuvvetin bileşkesi olan toplam kuvvete gravite denir. Gravitenin W potansiyeli, çekim kuvvetinin V potansiyeli ile merkezkaç kuvvetin F potansiyelinin toplamına eşittir; yani,

$$W = W(x,y,z) = V + F = k \iiint_V \frac{\rho}{l} dv + \frac{1}{2} w^2 r^2$$

olup integral tüm yeryuvarını kapsamaktadır. Yukarıdaki ifadeye bakıldığında merkezkaç potansiyelin basit bir analitik fonksiyon olmasına karşılık V çekim potansiyeli, üzerinde işlemler yapılması en güç olan parçayı oluşturur.

Merkezkaç kuvvet olan $F = \frac{1}{2} w^2 r^2$ ifadesinin türevi

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 2w^2$$

eşitliğini verir. Bu eşitlik V için verilen $\Delta V = -4 \pi k \rho$ *Poisson denklemi* ile birlikte ele alınırsa W gravite potansiyeli için

$$\Delta W = -4 \pi k \rho + w^2$$

olan *genelleştirilmiş Poisson denklemi* elde edilir.

W 'nin gradiyent vektörü,

$$\vec{g} = \text{grad}W \equiv \left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z} \right) \text{ olup}$$

$$g_x = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad g_y = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad g_z = \frac{\partial W}{\partial z} \text{ dir.}$$

Bileşenleriyle gravite vektörü adını alır. Bu bir birim kütleyle etki eden toplam (çekim+merkezkaç) kuvvettir. Bir vektör olarak büyüklüğü ve doğrultusu vardır. g büyüklüğüne gravite denir. Boyutu bir ivmenin fiziksel boyutu olup gal ile ölçülür ($1 \text{ gal} = 1 \text{ cm/s}^2$). g 'nin sayısal değeri yaklaşık olarak ekvatorunda 978 gal, kutuplarda 983 gal'dir.

$$dA = \vec{g}^* \cdot d\vec{l} \quad \text{olur.} \quad \vec{g} \perp d\vec{l}$$

Eşpotansiyelli yüzeyin her noktasında potansiyel sabittir. Dengede bulunan durgun su yüzeyinin her noktasında çekül doğrultusu dik açı yapar. Bu eşpotansiyelli yüzeyin üzerinde bir cisim hareket ettirilirse hiçbir iş yapılmaz.

$\dot{Iş} = kuvvet \times yol$ ilişkisinde vektör gösterimiyle yer çekimi kuvveti g olmak üzere diferansiyel anlamda yapılan iş,

olduğu için bu iki vektörün skaler çarpımı,

$$dA = |\vec{g}| |\vec{dl}| \cos \alpha \quad \text{olur.}$$

$\alpha = 90^\circ$ olduğu için $dA = 0$ olur. Buna karşılık bir kitle çekül doğrultusundan kaldırılırsa çekül doğrultusundaki yol dH olmak üzere yapılan iş,

$$dA = \vec{g} \cdot \vec{dH} = |\vec{g}| |\vec{dH}| \cos \alpha \quad \text{ve } \alpha = 0^\circ \quad \text{ile } dA = g \cdot dH \quad \text{olur.}$$

Herhangi bir su yüzeyinde $H = 0$ alınır, bu yüzeyin bir noktasından başlamak üzere çekül doğrultusunda bir birim kitle sonsuz yüksekliğe kaldırılırsa burada

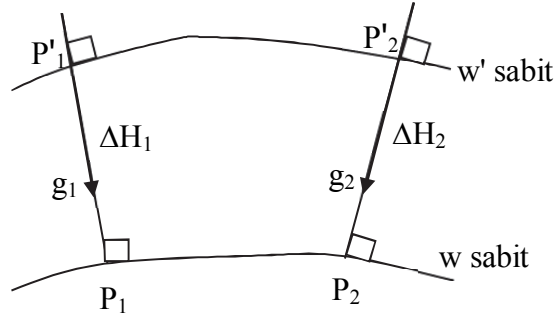
$$A = \int_0^\infty g dH = -W \quad \text{işi yapılmış olur. Burada } W, \text{ o su yüzeyinin potansiyeli adını alır.}$$

O halde bir su yüzeyinin potansiyeli bir birim kitlenin sonsuz yükseklikten su yüzeyinin bir noktasına indirilmesinde kaybedilen iştir. Burada $dW = -g dH = -dA$ dır. Bir birim kitle dengedeki bir su yüzeyinde taşınırsa hiçbir iş yapılmayacağından potansiyelde değişmez. Dengedeki bir su yüzeyi eşpotansiyelli bir yüzeydir ve böyle sonsuz sayıda yüzey düşünülebilir. Bunlardan bir tanesi de jeoiddir.

Eşpotansiyelli yüzeyler birbirini kesmez, sürekli ve yuvarlaktırlar(köşesizdirler). Tüm eşpotansiyelli yüzeyleri normal olarak(dikine) kesen eğriler tam doğru olmayıp, hafifçe eğridirler. Bunlara **çekül eğrileri** denir. Herhangi bir noktadaki gravite vektörü bu noktadaki çekül eğrisine teğettir.

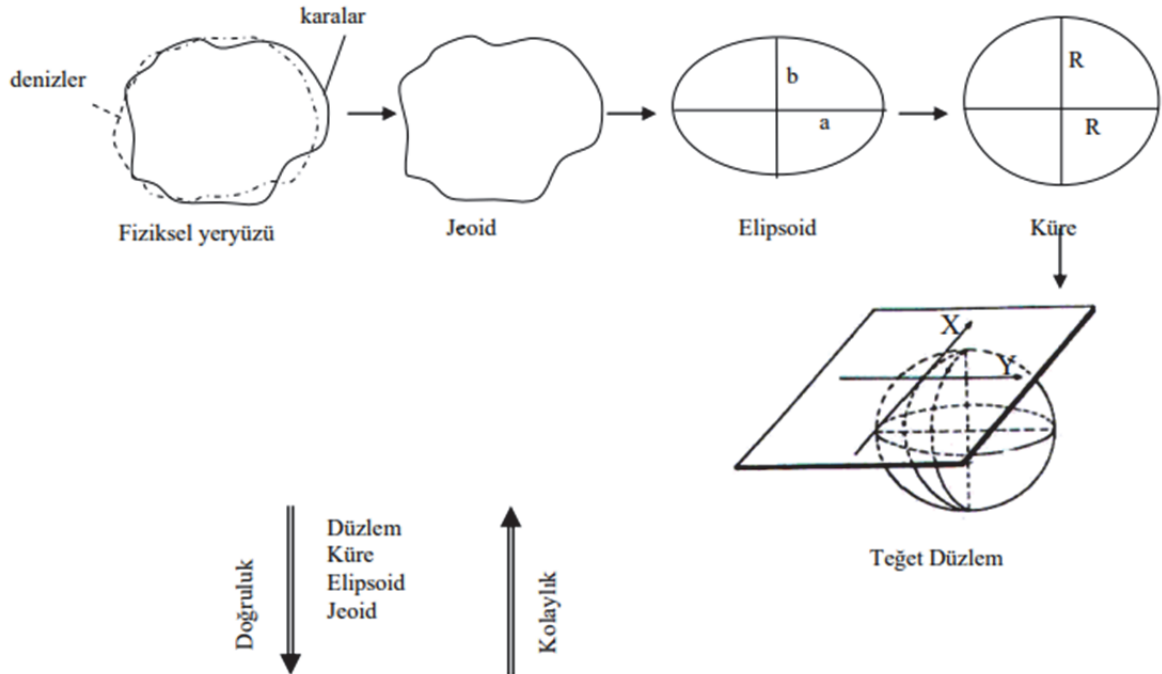
İki eşpotansiyelli yüzeyin herhangi iki noktası arasındaki potansiyel farkı sabittir (Şekil-10). O halde birbirine çok yakın böyle iki yüzeyin iki noktasındaki çekül doğrultusunda potansiyel farkı

$$\Delta w = w' - w = -g_1 \Delta H_1 = -g_2 \Delta H_2 \quad \text{olur.}$$



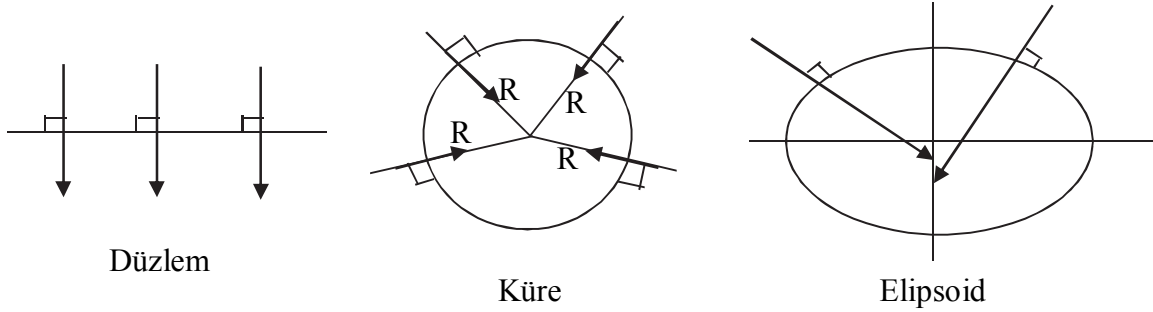
Şekil-10

P_1 ve P_2 noktalarındaki yerçekimi ivmeleri yerin coğrafi enlemine ve noktalardaki kitle yoğunluklarına bağlı olarak değişir. Yani $g_1 \neq g_2$ olur. O halde yukardaki eşitliğin sağlanabilmesi için $\Delta H_1 \neq \Delta H_2$ olmalıdır. Buradan eşpotansiyelli yüzeylerin birbirine paralel olmadıkları sonucu ortaya çıkar. Bir nivo yüzeyinin bir noktasından çekül doğrultusunda jeoide olan uzaklığına o noktanın ortometrik yüksekliği (H) denir. Herhangi iki noktanın potansiyellerinin eşitliği ortometrik yüksekliklerinin eşitliğini gerektirmez.



Şekil-11 Dünya için alınabilecek referans yüzeyleri

Aşağıdaki şekillerde dünyanın yerine hesap yüzeyi olarak alınacak çeşitli yüzeylerde yüzey normallerinin nasıl olduğu gösterilmektedir. Matematiksel jeodezide, jeoide en uygun ve çok yakın olan dönele elipsoidle çalışılır.



Şekil-12 Düzlem, Küre ve Elipsoid Yüzeylerinde Yüzey Normallerinin Gösterimi

Bu nedenle jeodezik uygulamalarda ölçme ve hesaplamalara kolaylık sağlayan geometrik yüzeyler kullanılır (şekil-11). Söz konusu geometrik yüzeyler sırasıyla; dönele elipsoid, küre ve düzlemdir. Çok büyük alanların ölçülmesinde dönele elipsoid referans (dayanak) yüzeyi olarak kullanılır. Daha küçük alanların ölçülmesinde küre ve düzlem (yeryuvarına teğet) referans yüzeyi olarak kullanılır.

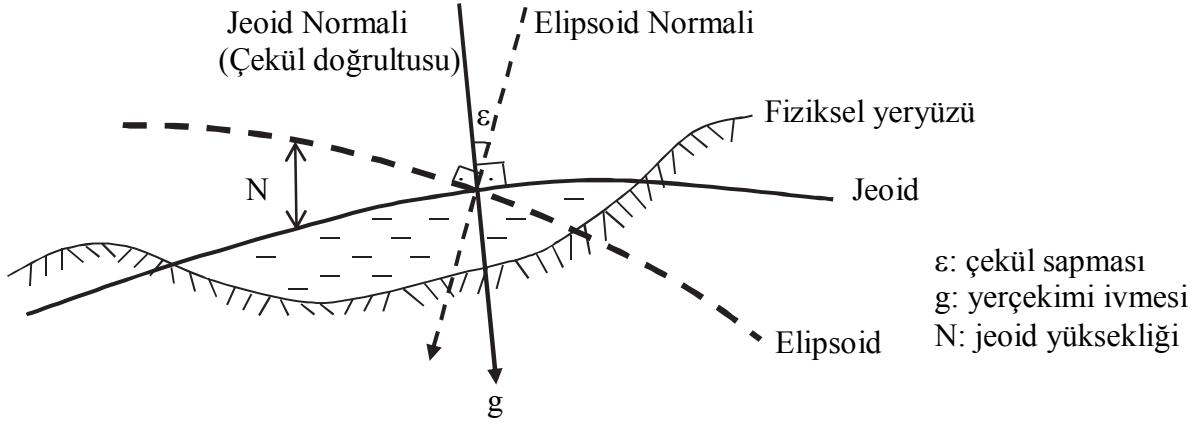
Genelde jeodezik çalışma bölgesi alan olarak,

500 km² den küçük ise plan ve detay çalışmaları için yeryuvarının şekli düzlem alınmakta (yükseklik boyutu için küresellik dikkate alınmalıdır),

500-5000 km² aralığında alanlar için yarıçapı $R_g = \sqrt{MN}$ şeklinde hesaplanacak küre,

5000 km² den daha büyük alanlar için yeryuvarının şekli dönele elipsoid olarak alınır.

Yukarıdaki gösterimden de (şekil-11) anlaşılacağı gibi, jeodezik çalışmalarda hesaplama kolaylığı aranınca doğruluktan ödün verilmesi, doğruluk istenince de hesaplamaların zorlaştığı ortaya çıkmaktadır. Günümüzde gelişen bilgisayar teknolojisi sayesinde hesaplama zorluğu büyük ölçüde ortadan kalkmıştır. En karmaşık hesaplamalar bilgisayarlar aracılığıyla çok hızlı ve doğru bir şekilde yapılabilmektedir.



Şekil-13 Fiziksel yeryüzünde Elipsoid ve Jeoidin bir arada gösterimi

Jeodezik hesaplamalarda hangi referans yüzeyi kullanılacaksa o yüzeye ait bağıntılarla (geometri ve trigonometri kurallarıyla) hesaplama yapılır. Yeryuvarı için söz konusu olabilecek referans yüzeylerinden elipsoid daha genel bir yüzey olduğundan elipsoid üzerindeki jeodezik bağıntılardan diğer yüzeyler (küre ve düzlem) için gerekli jeodezik bağıntılar rahatlıkla elde edilebilir. Zira elipsoidin yarı eksen uzunlukları birbirine eşit alındığında elipsoid küreye dönüşür. Aynı şekilde düzlemi de yarıçapı sonsuz olan bir küre olarak düşünebiliriz.

Yeryuvarı üzerinde bir noktada yapılan jeodezik ölçmelerde (uzunluk, açı) esas olan o noktadaki düşeyi tanımlayan çekül doğrultusudur (jeoid normali). Oysa elipsoid üzerindeki jeodezik hesaplamalarda elipsoid normalleri esas alınır. Bu nedenle elipsoid üzerindeki jeodezik hesaplamalarda bu farklılıklar dikkate alınır. Şekil-13 dan da görülebileceği gibi dünya için kabul edilen referans elipsoidi ile jeoid arasında her noktada değişen yükseklik farkı vardır. Eksi ve artı değer alabilen bu farklara jeoid yüksekliği (jeoid ondülasyonu) denir ve N ile gösterilir. *Helmert* bir jeoid yüzeyi ile onun yerine alınacak bir elipsoid yüzeyi arasında en çok 100m yükseklik farkı olacağını söylemiştir.

Özet olarak yeryuvarının şekli olarak seçilecek referans yüzeyini çalışmadan istenen doğruluk ve çalışma bölgesinin büyüklüğü belirler.

Bu bağlamda;

- Büyük ölçekli haritaların yapımında, Kent haritalarında ve mühendislik ölçmelerinde yeryuvarının şekli *Düzlem* alınır. Pratik jeodezik çalışmaların çok büyük kısmında yeryuvarı için düzlem model esas alınır. Şüphesiz düzlem model harita bilgilerinin zemine işlenmesinde de (aplikasyonda) büyük kolaylık sağlar.

- Küçük ölçekli haritaların yapımında, coğrafyada ve orta doğruluktaki jeodezik hesaplamalar için yeryuvarının şekli *Küre* alınır.
- Çok büyük alanları (ülke, kıta çapında) kapsayan ve yüksek doğruluk isteyen jeodezik çalışmalar için yeryuvarının şekli *Elipsoid* alınır.
- Düşey konumun (yüksekliklerin) duyarlı olarak belirlenmesinde yeryuvarının şekli olarak *Jeoid* modeli esas alınır. Ancak matematiksel olarak jeoidin tanımının güçlüğü nedeniyle gözlemler jeoid yüzeyine indirgenememekte ve dolayısıyla jeodezik hesaplamalar jeoid üzerinde yapılamamaktadır. Bu nedenlerle jeoid sınırlı uygulamalar dışında yeryuvarı için model olarak kabul edilmez.

Yeryuvarı için en uygun geometrik model olan elipsoid modelinin kullanılması genellikle jeodezi bilim dalına özgü bir durum olup diğer disiplinler küre modelini basitliği nedeniyle tercih ederler. Yerin şekline en uygun geometrik yüzey olan döne elipsoidin, küreden farkı-yani basıklığı çok küçüktür (yaklaşık 1/297) bu basıklık çıplak gözle fark edilemez. Dünyadaki deniz seviyesinden en büyük yükseltinin Everest tepesi (8848m) ve dünyanın yarıçapının yaklaşık 6370km olduğu düşünülürse Everest tepesinin dünyanın yarıçapına oranı 1/720 olur. Yani 720 birim yarıçapında bir küre üzerinde Everest tepesinin yüksekliği 1 birim olur.

Bu nedenlerle uygun konumda ve yarıçaptaki bir kürenin yeryuvarının şekli olarak kabul edilmesi çoğu jeodezik çalışmalar için bile yeterli olmaktadır.

1.6. Haritacılıkta (Jeodezide) İndirgemeler

Haritacıların, jeodezicilerin en temel görevleri olan konum belirleme problemi için fiziksel yeryüzünde (arazide) sıklıkla açı (doğrultu) ve uzaklık ölçüsü yaparlar. Ancak hesap yüzeyinin fiziksel yeryüzü olmadığını biliyoruz. Çalışma yapılan bölgenin büyüklüğüne ve çalışmadan istenen doğruluk derecesine göre seçilecek hesap (referans) yüzeyi düzlem, küre veya elipsoid olacaktır. Ölçülerin fiziksel yeryüzünde yapılması hesaplamaların ise referans yüzeyi üzerinde yapılması ölçülerin doğrudan hesaplamalarda kullanımını engeller. Bundan dolayıdır ki hesaplama da hangi yüzey kullanılacaksa ölçülerin de o yüzey üzerinde verilmesi gerekir. Fiziksel yeryüzü üzerinde yapılan ölçülerin matematik ve fizik kurallarından yararlanarak ilgili referans yüzeyine indirgenmeleri gerekir. Bu durum projeksiyon yüzeyleri üzerindeki hesaplamalar için de gereklidir. Şayet ölçülere bu indirgeme işlemleri yapılmazsa hesaplamalar tutmaz, doğru sonuçlar vermezler. Bazen bu indirgemeler çok küçük değerler alabilirler. İndirgemelerin ölçü inceliğinin altında kaldığı durumlarda ölçülere indirgeme yapılması da anlamlı olmaz.

Jeodezik ölçölere getirilecek indirgemeler hakkında genel olarak; düzlem, küre veya elipsoid yüzeylerinde hesaplama yapılacaksa yatay doğrultu ölçümleri için hiçbir indirgeme yapılmaz. Kenar ölçümleri içinse yerel yataydaki uzunluk ölçülerinin sadece deniz düzeyine indirgenmesi yeterli olacaktır diyebiliriz.

2. KÜREDE JEODEZİK HESAPLAMALAR

Dünyanın şekline en uygun geometrik yüzeyin bir dönel elipsoid olduğunu biliyoruz. Jeodezik hesaplamaların dönel elipsoid yerine küre üzerinde yapılması bir miktar doğruluk kaybına neden olmakla beraber hesaplamalarda büyük kolaylık sağlar. Elipsoid geometrisinden kaynaklanan zorluklar nedeniyle elipsoid üzerinde jeodezik hesaplamaların yapılması oldukça zahmetlidir. Ancak, jeodezide küre elipsoid yerine de kullanılabilir. Sınırlı büyüklükteki çalışma bölgelerinde Gauss küresi üzerindeki hesaplamalarla elipsoid yüzeyindeki sonuçların elde edilebilmesi küre üzerindeki jeodezik hesaplamaları daha önemli kılmaktadır.

Jeodeziciler en temel görevleri olan konum belirleme problemi için fiziksel yeryüzünde (arazide) sıklıkla uzaklık ve açı (doğrultu) ölçüsü yaparlar. Ancak hesap (referans) yüzeyinin fiziksel yeryüzü olamayacağını biliyoruz. Hesap yüzeyleri çalışma yapılan bölgenin büyüklüğüne ve çalışmadan istenen doğruluk derecesine göre düzlem, küre veya elipsoid olacaktır. Ölçülerin fiziksel yeryüzünde yapılması hesaplamaların ise referans yüzeyi üzerinde yapılması ölçülerin doğrudan hesaplamalarda kullanımını engeller. Bu nedenle hesaplamalarda hangi referans yüzeyi kullanılacaksa fiziksel yeryüzü üzerinde yapılan ölçülerin matematik ve fizik kurallarından yararlanarak ilgili referans yüzeyine indirgenmeleri gerekir. Projeksiyon yüzeyleri üzerindeki hesaplamalar için de aynı durum gereklidir. Şayet bu indirgeme işlemleri yapılmazsa hesaplamalar tutmaz, doğru sonuçlar elde edilemez. Ölçülere getirilecek bu indirgeme değerleri bazen ulaşılabilen ölçü duyarlılığının altında kalır bu durumda ölçülere indirgeme getirmek de anlamlı olmaz.

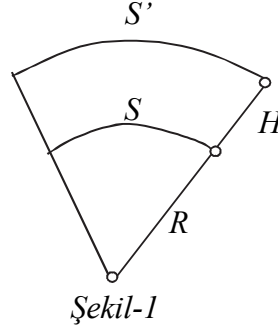
2.1. Ölçülerin Küre Yüzeyine İndirgenmesi

Küre yüzeyinde jeodezik hesaplamalar için ölçülerin (yatay doğrultu, yatay uzunluk gibi) küre yüzeyinde verilmesi gerekir. Gerçekte ölçüler fiziksel yeryüzünde yapıldığı için ölçülerin küre yüzeyine indirgenmesi gerekmektedir. Fiziksel yeryüzünde ölçülen doğrultulardan hesaplanan açılar, çekül sapmaları göz ardı edilirse küre yüzeyindeymiş gibi alınabilir.

Nirengi noktaları arasında ölçülen uzunlukların küre yüzeyine indirgenmesi için ölçümün yapıldığı bölgenin referans yüzeyinden (küreden ya da deniz seviyesinden) H yüksekliğinin bilinmesi gerekir. H yüksekliğinde yerel yatayda ölçülen S' uzaklığının küre yüzeyindeki S karşılığı aşağıdaki gibi olur (Şekil-1).

$$S = \left(1 - \frac{H}{R}\right)S'$$

$$S' = \left(1 + \frac{H}{R}\right)S$$



Şekil-1

Örnek: Denizden 2500m yükseklikli bir noktada yerel yatayda 7500.256m olarak ölçülen bir kenarının deniz seviyesindeki karşılığını bulunuz ($R=6370\text{km}$).

Cevap:

$$S = S' \left(1 - \frac{H}{R}\right) = 7497.312\text{m}$$

Örnek: Deniz seviyesindeki uzunluğu 7497.312m olan bir kenarın 2500m yüksekliğinde yerel yataydaki karşılığını bulunuz ($R=6370\text{km}$).

Cevap:

$$S' = \frac{S}{\left(1 - \frac{H}{R}\right)} \approx S \left(1 + \frac{H}{R}\right) = 7500.254\text{m}$$

2.2. Küre Geometrisi

Küre, uzayda bir sabit (O) noktasından sabit R uzaklıktaki noktaların geometrik yeri olarak tanımlanır. Merkezi orijinde olan bir kürenin üçboyutlu dik koordinat sisteminde denklemi aşağıdaki gibidir.

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2$$

Küre yüzeyinin bütün normaleri kürenin merkezinde kesişir. Küre yüzeyinin her noktasında eğrilik sabit olup küre yarıçapının tersine eşittir ($K= 1 / R$). Küre yüzeyi üzerinde iki noktayı tek anlamlı olarak birleştiren ve aynı zamanda en kısa uzaklık büyük daire yayıdır (ortodrom eğrisi).

Küresel Trigonometri

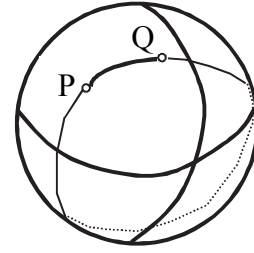
Küre üzerinde hesaplamalar küresel trigonometrinin konusudur. Küresel Trigonometriden küre yüzeyinde trigonometri diğer bir deyişle küre yüzeyinde üçgen hesabı anlaşılır. Bilindiği üzere küre yüzeyinin bütün normaleri kürenin merkezinde

kesişir. Küre yüzeyinin her noktasında her doğrultuda eğrilik sabittir. Küre yüzeyi üzerinde iki noktayı tek anlamlı olarak birleştiren ve aynı zamanda en kısa uzaklık büyük daire yayıdır (ortodrom eğrisi). Bu nedenle küre yüzeyindeki jeodezik amaçlı hesaplamalarda noktalar hep büyük daire yayları ile birleştirilir. R yarıçaplı bir kürenin herhangi bir düzlemle arakesiti her zaman bir dairedir. Bu arakesit dairenin yarıçapı R_D için $0 \leq R_D \leq R$ eşitsizliği vardır.

Büyük Daire: Kürenin merkezinden geçen bir düzlemle ara kesitidir. Ekvator dairesi, meridyen dairesi gibi. Büyük dairenin yarıçapı kürenin yarıçapına eşittir. Büyük daire, küre üzerindeki iki noktayı birleştiren en kısa eğriyi de içerir.

Küçük Daire: Kürenin merkezinden geçmeyen bir düzlemle ara kesitidir. Örneğin enlem daireleri birer küçük dairedirler.

Küresel Uzaklık: Küre üzerinde iki noktayı birleştiren büyük daire yayının kısa olan parçasıdır. Yandaki şekil-2 de gösterilen P ve Q noktalarını birleştiren büyük daire yayının kısa parçası küresel uzaklık olarak adlandırılır.



\widehat{PQ} = Büyük daire yayı

Şekil -2

Küresel Açı: Küre üzerindeki iki büyük daire yayı arasındaki açıklığa küresel açı denir. Bu açı her iki büyük daire düzlemleri arasındaki ölçek açısı ile ölçülür.

2.3. Küre Üzerinde Bazı Büyüklüklerin Hesabı

a) Küre üzerinde meridyen yayı hesabı

Küre üzerinde meridyen yayı hesabı, meridyen dairesinin geometrisi R yarıçaplı bir çember olduğu için merkez açısı gören yay eşitliğinden bulunur. Örneğin 1 derecelik meridyen yayı (b) kürenin her yerinde birbirine eşit olup,

$$b = \frac{\alpha}{\rho} R$$

dan hesaplanır. R yarıçapı yerine 6370km değeri alınırsa 1 derecelik meridyen yayı uzunluğu 111.177 km olur.

b) Küre üzerinde paralel daire yayı hesabı

Küre üzerinde paralel daire yayı hesabı yapmak için önce paralel dairenin yarıçapı R_ϕ bulunur. ϕ enlemli paralel dairenin yarıçapı

$$R_{\varphi} = R \cos \varphi$$

den bulunur. Paralel dairenin yarıçapı bulunduktan sonra yine merkez açığı gören yay eşitliğinden paralel daire yayı hesaplanır.

Örneğin 39° enlemindeki 1 derecelik paralel daire yayı (s)

$$\varphi = 39^{\circ} \quad R = 6370 \text{ km}$$

$$R_{\varphi} = R \cos \varphi = 4950419.775 \text{ m} \quad (39^{\circ} \text{ enlem dairesinin yarıçapı})$$

1 derecelik paralel daire yayı

$$s = \frac{\alpha}{\rho} R_{\varphi} = 86401.124 \text{ m olur.}$$

Paralel daire yayları ekvator dan kutuplara doğru gidildikçe kısalır.

Örnek: Kürede 39° paralel dairesi üzerindeki iki nokta arasındaki boylam farkı 3 derecedir. Söz konusu iki nokta arasındaki paralel daire yay uzaklığı ile küresel uzaklığı bulunuz. Hangisinin kısa olduğunu belirtiniz.

$$\Delta \lambda = 3^{\circ} \quad \varphi = 39^{\circ} \quad R = 6370 \text{ km}$$

39° paralel dairesi üzerinde 3° lik paralel daire yayı

$$R_{\varphi} = R \cdot \cos \varphi = 4950419,775 \text{ m}$$

$$b = R_{\varphi} * \frac{3^{\circ}}{\rho^{\circ}} = 259203,3733 \text{ m}$$

39° paralel dairesi üzerinde 3° lik küresel uzaklık

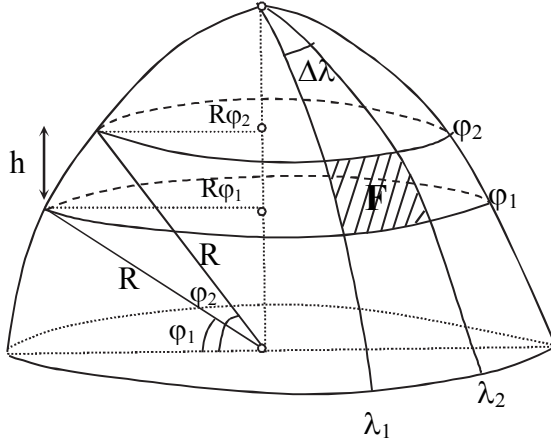
$$\cos S = \cos^2 51 + \sin^2 51 * \cos 3^{\circ}$$

$$S = 2,331332388^{\circ} = 2^{\circ} 19' 52.8'' = 259191,645 \text{ m}$$

Görüldüğü üzere iki nokta arasındaki küresel uzaklık en kısa uzaktır.

c) Küre Üzerinde Alan Hesabı

Bilindiği gibi R yarıçaplı bir kürenin tamamının alanı; $F = 4\pi R^2$ eşitliğinden hesaplanabilmektedir [18]. Küre üzerinde φ_1 ve φ_2 paralel daireleri ile λ_1 , λ_2 meridyen dairelerinin sınırladığı gridin (F) alanı (şekil-3) hesaplanmak istenirse, önce yüksekliği h olan φ_1 , φ_2 paralel dairelerin sınırladığı küre kuşağının s alanı aşağıdaki biçimde bulunur.



$$s = 2\pi Rh$$

$$h = R(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)$$

$$h = 2R \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}$$

$$s = 4\pi R^2 \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}$$

Şekil-3

İstenen F grid alanı s kuşak alanından aşağıdaki gibi hesaplanır;

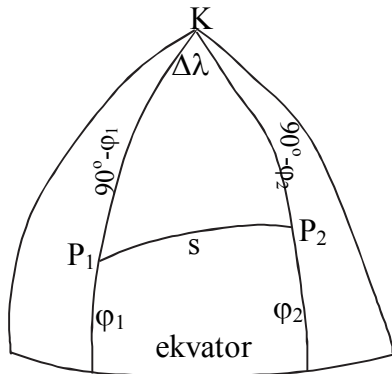
$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$$

$$F = s \frac{\Delta\lambda / \rho^\circ}{2\pi}$$

$$F = 2R^2 \frac{\Delta\lambda^\circ}{\rho^\circ} \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}$$

2.4. Küre Üzerinde Özel Eğriler

1) Ortodrom Eğrisi: Küre üzerinde coğrafi koordinatlarıyla bilinen $P_1(\varphi_1, \lambda_1)$ ve $P_2(\varphi_2, \lambda_2)$ noktalarını birleştiren büyük daire yayıdır. Büyük daire söz konusu iki nokta ile kürenin merkezinden geçen bir düzlemin küreyle arakesitidir. Bu daire üzerindeki P_1 ve P_2 noktalarını birleştiren yaylardan kısa olanı büyük daire yayıdır.

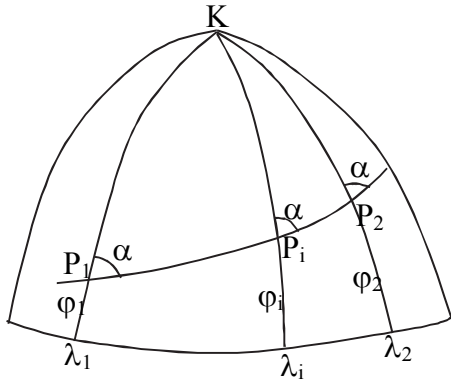


$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$$

Kenar-kosinüs teoreminden s ortodrom eğrisinin uzunluğu hesaplanır.

$$\cos s = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \Delta\lambda$$

2) Loksodrom Eğrisi: Coğrafi koordinatlarıyla bilinen $P_1(\varphi_1, \lambda_1)$ ve $P_2(\varphi_2, \lambda_2)$ noktalarını birleştiren eğri meridyen doğrultularıyla hep sabit bir α açısı yapıyorsa bu eğriye loksodrom eğrisi denir. Eğri üzerinde her noktanın kuzeyle yaptığı açı değişmediği için eğriye “sabit pusula açısı altında gidilen yol” denir. Loksodrom eğrisi özellikle deniz trafiğinde önemlidir. Gemiler yolculuklarını sabit kuzey açısı altında ve loksodrom eğrisi üzerinde yaparlar.



PP_0P' diferansiyel üçgeninin PP' kenarı ds $\widehat{P'P_0}$ kenarı $d\varphi$ kadardır. Üçgenin P noktasındaki açısı $(90-\alpha)$ 'dir. Kürenin yarıçapı R olduğuna göre $d\varphi$ açısının uzunluk cinsinden değeri,

$$\widehat{P'P_0} = \frac{d\varphi}{\rho} R$$

PP_0 paralel daire yayı parçasının uzunluğu da,

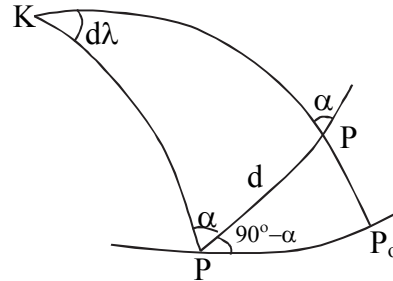
$$\widehat{PP_0} = \frac{d\lambda}{\rho} R \cos \varphi \quad d\lambda = \lambda' - \lambda$$

PP_0P' diferansiyel üçgeni, dik bir düzlem üçgen kabul edilebilir. Buna göre;

$$\cot(90^\circ - \alpha) = \frac{PP_0}{P'P_0} = \tan \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{\frac{d\lambda}{\rho} R \cos \varphi}{\frac{d\varphi}{\rho} R} = \frac{d\lambda \cos \varphi}{d\varphi}$$

$$d\lambda = \tan \alpha \frac{d\varphi}{\cos \varphi}$$



diferansiyel bağıntısı elde edilir. Bu son bağıntının integrali alınır,

$$\int d\lambda = \tan \alpha \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi}$$

$$\lambda = \tan \alpha \left[\text{Intan} \left(45^\circ + \frac{\varphi_2}{2} \right) + c \right]$$

olur. PP' loksodrom eğrisi üzerinde P_1 ve P_2 noktaları için son eşitlik yazılırsa belirsizlik giderilmiş olur.

$$\lambda_1 = \tan\alpha \left[\text{Intan}\left(45^\circ + \frac{\varphi_1}{2}\right) + c \right]$$

$$\lambda_2 = \tan\alpha \left[\text{Intan}\left(45^\circ + \frac{\varphi_2}{2}\right) + c \right]$$

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \tan\alpha \left[\text{Intan}\left(45^\circ + \frac{\varphi_1}{2}\right) - \text{Intan}\left(45^\circ + \frac{\varphi_2}{2}\right) \right]$$

$$\tan\alpha = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\text{Intan}\left(45^\circ + \frac{\varphi_2}{2}\right) - \text{Intan}\left(45^\circ + \frac{\varphi_1}{2}\right)}$$

Bu bağıntıyla loksodrom eğrisinin kuzey açısı hesaplanır. Eğri için özel durumlar;

- a) $\varphi_1 = \varphi_2$ ise $\tan\alpha = \infty$ ve $\alpha = 90^\circ$ yani loksodrom eğrisi P_1P_2 'den geçen paralel daire yayıdır.
- b) $\lambda_1 = \lambda_2$ ise $\alpha = 0$ yani loksodrom eğrisi P_1P_2 'den geçen meridyendir.

Loksodrom eğrisinin uzunluğu ds,

$$ds = \frac{P'P_o}{\cos\alpha}$$

$$ds = \frac{R}{\cos\alpha} \frac{d\varphi}{\rho}$$

bu diferansiyel bağıntıdan P_1 ve P_2 sınırları içinde integrali alınırsa

$$\int ds = \frac{R}{\cos\alpha} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\rho} \quad \text{olur.}$$

$$s = \frac{R}{\cos\alpha} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\rho}$$

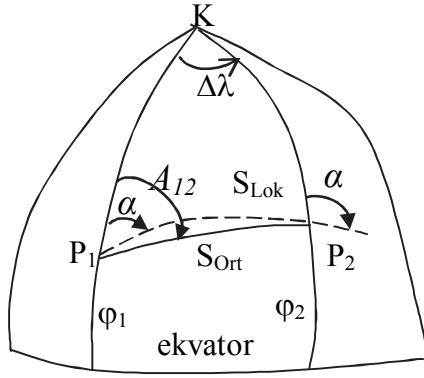
Örnek: P_1 ve P_2 noktalarının küresel coğrafi koordinatları

$$P_1(\varphi_1 = 39^\circ 30' 18'', \lambda_1 = 39) \quad P_2(\varphi_2 = 39^\circ 00' 36'', \lambda_2 = 39^\circ 30')$$

$$R = 6374249.664 \text{ m}$$

olarak veriliyor. İki nokta arasındaki;

- a) Ortodrom eğrisinin uzunluğunu ve P_1 noktasındaki A_{12} Azimut açısını
- b) P_1 ve P_2 noktalarından geçen loksodrom eğrisinin kuzeyle yaptığı sabit α açısını ve loksodrom eğrisinin uzunluğunu bulunuz.



$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$$

Kenar-kosinüs teoreminden s ortodrom eğrisinin uzunluğu hesaplanır.

$$\cos s = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\Delta\lambda$$

a) Ortodrom eğrisinin uzunluğu

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \Delta\lambda = 30'$$

Kenar-kosinüs teoreminden S ortodrom eğrisinin uzunluğu hesaplanır.

$$\cos s = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\Delta\lambda$$

$$s = 0.6284192404^\circ = 69912.6736 \text{ m}$$

$$A_{12} = 141.8114640^\circ = 141^\circ 48' 41.2706''$$

b) Loksodrom eğrisinin sabit α kuzey açısı ve uzunluğu

$$\tan \alpha = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\ln \tan(45^\circ + \frac{\varphi_2}{2}) - \ln \tan(45^\circ + \frac{\varphi_1}{2})}$$

$$\alpha = 141.9701327^\circ = 141^\circ 58' 12.4777''$$

$$s = \frac{R}{\cos\alpha} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\rho} = 69912.7624 \text{ m}$$

2.4. Küre Yüzeyinde Üçgen Hesabı

Dünyanın şekli olarak elipsoid yerine küre alınması, bir miktar doğruluk kaybına sebep olmakla beraber hesaplamalarda büyük kolaylık sağlar. Küre üzerinde jeodezik hesaplamaların nasıl yapılacağı küresel trigonometrinin konusudur. Ancak jeodezik çalışmalarda kullanılan üçgenler birer küçük küresel üçgen (kenar uzunlukları maksimum 50 km) oldukları göz önünde bulundurulursa bu tür üçgenlerin çözümü için yeteri doğruluk verebilecek iki yaklaşık yöntem geliştirilmiştir. Bunlar; Legendre ve Additament (ekleme) yöntemleridir.

Ekses (Küresel Artık)

Bilindiği gibi bir üçgenin iç açılarının toplamı π ye yani 180° ye eşit olması kuralı düzlem trigonometri için geçerlidir. Küresel üçgenlerde iç açıların toplamı her zaman 180° den büyüktür. Bir küresel üçgenin iç açıları toplamının 180° den fazla olacağı ilk bakışta görülebilir. Şöyle ki kürenin meridyen daireleri (kutuplardan geçen büyük daireler) ekvatoru dik olarak keserler. İki meridyenle ekvatorun teşkil ettiği bir ekvator-kutup küresel ABC üçgeninde iç açılarının toplamı π den meridyenler arasındaki $\Delta\lambda$ kadar fazladır. Bunun gibi her küresel üçgende iç açıların toplamı π yani 180° den, üçgenin büyüklüğüne göre az veya çok farklı olur. Bu farka küresel ekses denir ve ε ile gösterilir.

$$F = \varepsilon.R^2 \Rightarrow \varepsilon = \frac{F}{R^2}$$

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

Küresel üçgenin F alanı ekresiyle doğru orantılıdır. Aralarındaki ilişki yukarıdaki gibidir.

Örneğin; kenarları 2 km olan eşkenar bir üçgen ekresi $\varepsilon = 0.009''$

kenarları 10 km olan eşkenar bir üçgen ekresi $\varepsilon = 0.22''$

kenarları 50 km olan eşkenar bir üçgen ekresi $\varepsilon = 5.48''$ dir.

Jeodezide karşılaşılan üçgenlerin kenarları 50 km'yi geçmeyeceğine göre ekses hiçbir zaman $5'', 6''$ yi geçmez. Diğer taraftan $\varepsilon < 10''$ o lduğundan küresel üçgenin alanı yerine düzlem üçgenin alanı alınabilir.

Teorik olarak bir küresel üçgende eksesten alan hesabı ve alandan ekse hesabı yapmak mümkündür. Ancak pratikte ölçülen açılar kullanılarak yapılacak ekse hesabı ölçü hataları nedeniyle doğru sonuç vermez. Bu şekilde ölçülen açılardan hesaplanacak ekse değerinden küresel üçgenin alanı bulunurken ekse değerinin R^2 gibi çok büyük bir sayı ile çarpılıyor olması eksesteki hatayı çok büyütür alan değerine yansıtılmaktadır. Bu nedenle ekse değerinin alandan hesaplanması ya da ölçülen açılar yerine küresel üçgenin kenarlarından bulunması uygun olacaktır. Bunun için küresel trigonometrideki L'Huilier ve Serret formülleri kullanılabilir.

$$\tan \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\tan \frac{u}{2} \tan \frac{u-a}{2} \tan \frac{u-b}{2} \tan \frac{u-c}{2}} \quad u = \frac{a+b+c}{2}$$

Ekses, kenarları küresel üçgenin kenarlarına eşit bir düzlem üçgenin alanı (Δ) türünden hesaplanmak istenirse, kenarları a, b ve c olan düzlem üçgenin alanı

$$\Delta = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)} ; \text{ düzlem üçgenin alanı}$$

Aynı kenar uzunluklarına sahip olan düzlem üçgenin alanından küresel üçgenin alanı ve eksesi hesaplanmak istenirse aşağıdaki formüller kullanılabilir.

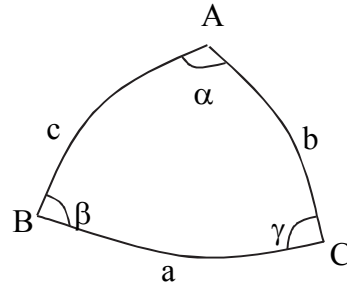
$$F = \Delta \left(1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{24R^2}\right) ;$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{R^2} \left(1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{24R^2}\right) \rho \text{ olur.}$$

2.6. Küresel Trigonometri Teoremleri

1- Sinüs Teoremi

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} = m$$



Şekil -4

2- Kenar Kosinüs Teoremi

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \quad (*)$$

3- Açık Kosinüs Teoremi

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a \quad (*)$$

4- Neper Formülleri (1)

(*)

$$\tan \frac{b+c}{2} = \tan \frac{a}{2} \frac{\cos \frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos \frac{\beta+\gamma}{2}}$$

$$\tan \frac{b-c}{2} = \tan \frac{a}{2} \frac{\sin \frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin \frac{\beta+\gamma}{2}}$$

Neper Formülleri (2)

(*)

$$\tan \frac{\beta+\gamma}{2} = \cot \frac{\alpha}{2} \frac{\cos \frac{b-c}{2}}{\cos \frac{b+c}{2}}$$

$$\tan \frac{\beta-\gamma}{2} = \cot \frac{\alpha}{2} \frac{\sin \frac{b-c}{2}}{\sin \frac{b+c}{2}}$$

Not: (*) lı eşitlikler küresel üçgenin diğer elemanları için de dönerli olarak yazılabilir. Örneğin

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

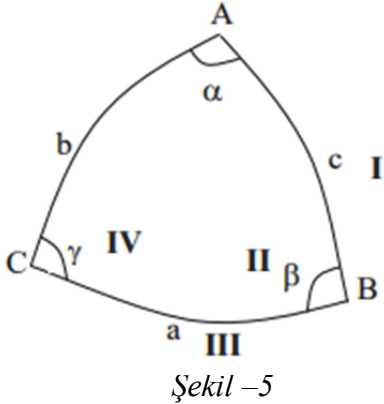
şeklinde verilen *Kenar Kosinüs Teoremi* şu şekilde yorumlanmalıdır;

bir kenarın (a) kosinüsü = diğer iki kenarın (b,c) kosinüsleri çarpımı + diğer iki kenarın (b,c) sinüsleri ve başlangıçtaki kenarın (a) karşısındaki açının (α) kosinüsü çarpımına eşittir. Söz konusu teoremi diğer kenarlar için de yukarıdaki yorumlaya sadık kalarak aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta$$

$$\cos c = \cos b \cos a + \sin b \sin a \cos \gamma$$

5- Kotanjant Teoremi (Dört Parça Teoremi)



Dört parça teoreminin genel yazılışı şu şekildedir: Küresel üçgenin herhangi bir kenarından başlamak koşuluyla üçgenin elemanları sırayla (saat ibresi veya tersi yönde) I den IV e kadar numaralandırılır. Örneğin şekil-5 deki küresel üçgen için numaralandırmaya c kenarından başlar ve saat ibresi yönünde hareket edersek numaralama

$$c \rightarrow \text{I} \quad \beta \rightarrow \text{II} \quad a \rightarrow \text{III} \quad \gamma \rightarrow \text{IV}$$

şeklinde olur.

Dört parça teoremi gereği aşağıdaki eşitlik her zaman sağlanır.

$$\cos \text{III} \cos \text{II} = \sin \text{III} \cot \text{I} - \sin \text{II} \cot \text{IV}$$

$$\cos a \cos \beta = \sin a \cot c - \sin \beta \cot \gamma$$

6- L'Huilier ve Serret Eşitliği

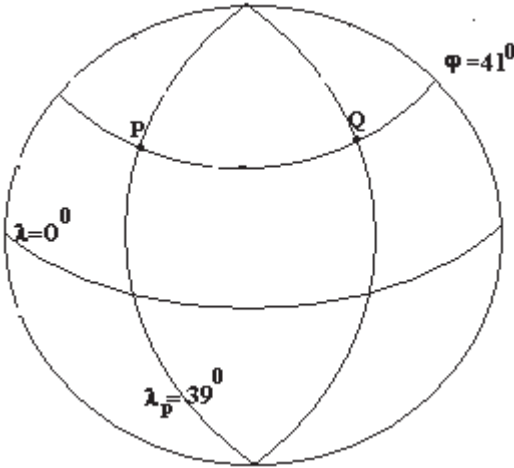
Bu eşitlik küresel üçgenin eknesini kenarlar cinsinden vermektedir.

$$\tan \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\tan \frac{u}{2} \tan \frac{u-a}{2} \tan \frac{u-b}{2} \tan \frac{u-c}{2}} \quad u = \frac{a+b+c}{2}$$

2.7. Küresel Üçgenlerin Çözümleri

Bir küresel üçgenin çözülebilmesi için üçü kenar, üçü de açı olmak üzere toplam altı elemanından herhangi üçünün verilmesi yeterlidir. Düzlem trigonometriden farklı olarak üç açısı bilinen küresel üçgenler de çözülebilmektedir. Zira kürenin yarıçapının sabit olmasıyla küresel üçgenin üç iç açısı üçgeni belirlemektedir. Küresel üçgenin verilen elemanlarına uygun küresel trigonometri teoremleri kullanılarak üçgen çözümleri gerçekleştirilir [4],[7],[29].

Örnek-1: 41° enlem dairesi üzerindeki P ve Q noktaları arasındaki enlem dairesi yay uzunluğu 5km'dir. P noktasının boylamı 39° dir. Q noktasının boylamını bulunuz ($R=6370\text{km}$).



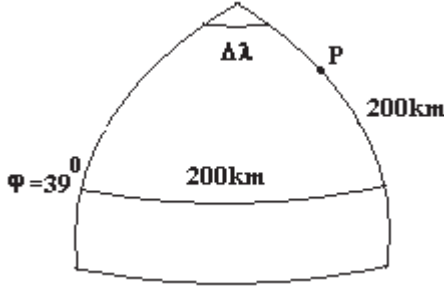
Çözüm:

$$R_{41} = R \cdot \cos 41 = 4807.500026\text{km}$$

$$\Delta\lambda = \frac{5\text{km}}{R_{41}} \rho^\circ = 0,05959^\circ = 0^\circ 3' 34.52''$$

$$L_Q = 39^\circ + \Delta\lambda = 39^\circ 3' 34.52'' = 39.05959$$

Örnek-2: Küre üzerinde, enlem ve boylamı 39° olan bir noktadan enlem dairesi boyunca 200km doğuya sonra da bu noktadan meridyen boyunca 200km kuzeye gidilerek P noktasına ukaşılıyor. P noktasının coğrafi koordinatlarını derece dakika ve saniye olarak bulunuz ($R=6370\text{km}$).

Çözüm:

$$R_{\varphi} = R \cdot \cos 39 = 4950,419775$$

$$\Delta\lambda = \frac{200}{R_{\varphi}} \cdot \rho = 2.31478469^{\circ}$$

$$\Delta\lambda = 2^{\circ}18'53.22'$$

$$\Delta\varphi = \frac{200}{R} \cdot \rho = 1,798925573^{\circ}$$

$$\Delta\varphi = 1^{\circ}47'56.13''$$

$$\varphi_P = 40^{\circ}47'56.13'' \quad \lambda_P = 41^{\circ}18'53.22''$$

Örnek-3: Kürede $P_1(\varphi_1 = 40^{\circ}, \lambda_1 = 40^{\circ})$ ve $P_2(\varphi_2 = 39^{\circ}, \lambda_2 = 39^{\circ})$ noktaları arasında II. Temel ödev çözümü yaparak küresel $s(m)$, A_{12} , A_{21} , değerlerini derece dakika ve saniye olarak bulunuz.

$$\sigma = \arccos(\sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos \Delta\lambda)$$

$$A_{12} = \arctan\left(\frac{\sin \Delta\lambda}{\tan \varphi_2 \cdot \cos \varphi_1 - \sin \varphi_1 \cdot \cos \Delta\lambda}\right)$$

$$A_{21} = \arctan\left(\frac{\sin \Delta\lambda}{\cos \Delta\lambda \cdot \sin \varphi_2 - \cos \varphi_2 \cdot \tan \varphi_1}\right) + \pi$$

Çözüm:

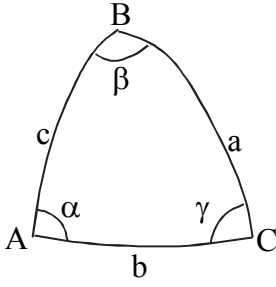
$$\sigma = \arccos(\sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos \Delta\lambda) = 140425.223m$$

$$A_{12} = \arctan\left(\frac{\sin \Delta\lambda}{\tan \varphi_2 \cdot \cos \varphi_1 - \sin \varphi_1 \cdot \cos \Delta\lambda}\right) = 217^{\circ}.9737749 = 217^{\circ}58'25.58''$$

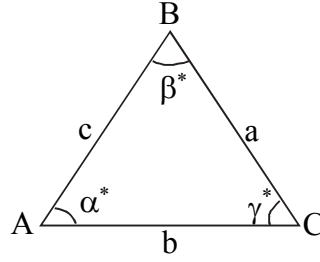
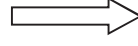
$$A_{21} = \arctan\left(\frac{\sin \Delta\lambda}{\cos \Delta\lambda \cdot \sin \varphi_2 - \cos \varphi_2 \cdot \tan \varphi_1}\right) + \pi = 37^{\circ}.3376598 = 37^{\circ}20'15.57''$$

Legendre Teoremi ile Küresel Üçgenlerin Yaklaşık Çözümü

Küçük küresel üçgenlerin aşağıda belirtilen şekilde yeterli yaklaşıpta çözümleri mümkündür. Legendre yönteminde küresel üçgenin açıları eksenin üçte biri kadar küçültülürse, küçük küresel üçgenler eşit kenarlı düzlem üçgenler gibi çözülebilir [4], [29].



Şekil -6.a Küresel Üçgen



Şekil -6.b Yardımcı Düzlem Üçgen

Yardımcı düzlem üçgenin açıları küresel üçgenin açılarından aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\alpha^* = \alpha - \frac{\varepsilon}{3}, \quad \beta^* = \beta - \frac{\varepsilon}{3}, \quad \gamma^* = \gamma - \frac{\varepsilon}{3}$$

Küresel trigonometrideki sinüs teoremi yerine aşağıdaki düzlem sinüs teoremi kullanılabilir.

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} \Rightarrow \frac{a}{\sin\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{3}\right)} = \frac{b}{\sin\left(\beta - \frac{\varepsilon}{3}\right)} = \frac{c}{\sin\left(\gamma - \frac{\varepsilon}{3}\right)}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha^*} = \frac{b}{\sin \beta^*} = \frac{c}{\sin \gamma^*}$$

Örnek-4: Bir ABC küresel üçgenin aşağıdaki üç elemanı veriliyor. Küresel üçgeni Legendre yöntemine göre çözünüz. ($R=6374446.156\text{m}$)

Verilenler:

$$c = 76341.260 \text{ m} , \quad \alpha = 47^\circ 23' 42.206'' , \quad \beta = 82^\circ 49' 43.299''$$

İstenenler: γ açısı, a ve b kenarlarının Legendre yöntemiyle çözümü

Çözüm: Önce küresel üçgenin alanından eksesi hesaplanır.

$$\varepsilon = \frac{F}{R^2} \rho = c^2 \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \frac{\rho''}{2R^2} \quad F = 2787105509\text{m}^2$$

$$\varepsilon = 14.147'' \Rightarrow \frac{\varepsilon}{3} = 4.716''$$

$$\gamma = 180^\circ + \varepsilon - (\alpha + \beta)$$

$$\gamma = 49^\circ 46' 48.642''$$

Yardımcı düzlem üçgenin iç açıları;

$$\alpha^* = \alpha - \frac{\varepsilon}{3} = 47^\circ 23' 37.490''$$

$$\beta^* = \beta - \frac{\varepsilon}{3} = 82^\circ 49' 38.583''$$

$$\gamma^* = \gamma - \frac{\varepsilon}{3} = 49^\circ 46' 43.926''$$

Düzlem sinüs teoreminden istenen a ve c kenarı;

$$a = \frac{c}{\sin \gamma^*} \sin \alpha^* = 73588.314 \text{ m}$$

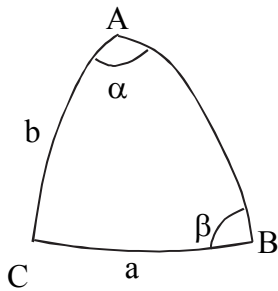
$$b = \frac{c}{\sin \gamma^*} \sin \beta^* = 99198.566 \text{ m}$$

olarak bulunur.

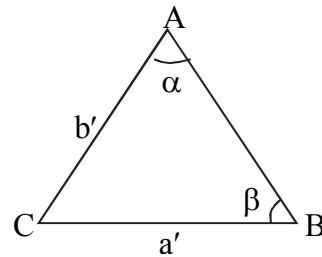
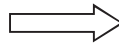
Additament (Ekleme) Yöntemi ile Küresel Üçgen Çözümü

Bu yöntemde küçük küresel üçgenlerin çözümü için kullanılan yaklaşık yöntemlerden biridir. Soldner tarafından bulunduğu için Soldner Additament yöntemi olarak da adlandırılmaktadır.

Bu yöntemde küresel üçgenin (s) kenarları $\frac{s^3}{6R^2}$ kadar küçültülerek elde edilen kenarlarla küresel üçgenin açıları kullanılarak düzlem trigonometri formülleriyle çözüm yapılır. Bu yöntemde açıları küresel üçgenin açılarına kenarları yukarıdaki kurala göre kısaltılmış yardımcı düzlem üçgen kullanılarak çözüm yapılır.



Şekil –7.a Küresel Üçgen



Şekil –7.b Yardımcı Düzlem Üçgen

Kısaltılmış kenarlar

$$a' = a - \frac{a^3}{6R^2} \quad b' = b - \frac{b^3}{6R^2}$$

Örnek-5: Bir ABC küresel üçgeninin aşağıdaki üç elemanı veriliyor. Küresel üçgeni Additament yöntemine göre çözünüz. ($R=6374446.156\text{m}$)

Verilenler:

$$c = 76341.260 \text{ m}$$

$$\alpha = 47^\circ 23' 42.206''$$

$$\beta = 82^\circ 49' 43.299''$$

İstenenler: γ açısı, a ve b kenarlarının Additament yöntemiyle çözümü

$$\varepsilon = \frac{F}{R^2} \rho = c^2 \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} \frac{\rho''}{2R^2} = 14.147''$$

$$\gamma = 180^\circ + \varepsilon - (\alpha + \beta) = 49^\circ 46' 48.642''$$

$$F = 2787105509\text{m}^2$$

Verilen c küresel kenarından c' düzlem kenarı;

$$c' = c - \frac{c^3}{6R^2} = 76339.433 \text{ olarak bulunur.}$$

a' ve b' düzlem kenarları;

$$a' = \frac{c'}{\sin\gamma} \sin\alpha \Rightarrow a' = 73586.679 \text{ m}$$

$$b' = \frac{c'}{\sin\gamma} \sin\beta \Rightarrow b' = 99194.562 \text{ m}$$

a ve b küresel kenarlar;

$$a = a' + \frac{a'^3}{6R^2} = 73588.314 \text{ m}$$

$$b = b' + \frac{b'^3}{6R^2} = 99198.566 \text{ m}$$

Oysa problemin gerçek çözümü (küresel trigonometri teoremlerinden);

Açı-kosinüs teoreminden γ açısı için

$$\cos\gamma = \sin\alpha \sin\beta \cos c - \cos\alpha \cos\beta$$

yazılabilir.

Buradan γ açısı

$$c = 76341.260 \text{ m} \Rightarrow c = 0^\circ.68618228$$

$$\gamma = 49^\circ.78017844 = 49^\circ 46' 48.64''$$

olarak bulunur.

İstenen a ve b kenarları küresel sinüs teoreminden

a kenarı;

$$\sin a = \frac{\sin c}{\sin \gamma} \sin \alpha \Rightarrow a = 73588.313 \text{ m}$$

b kenarı;

$$\sin b = \frac{\sin c}{\sin \gamma} \sin \beta \Rightarrow b = 99198.566 \text{ m}$$

olarak bulunur. Görüldüğü gibi gerek Legendre gerekse Additament yöntemleri gerçek çözüme oldukça iyi yaklaşmaktadır.

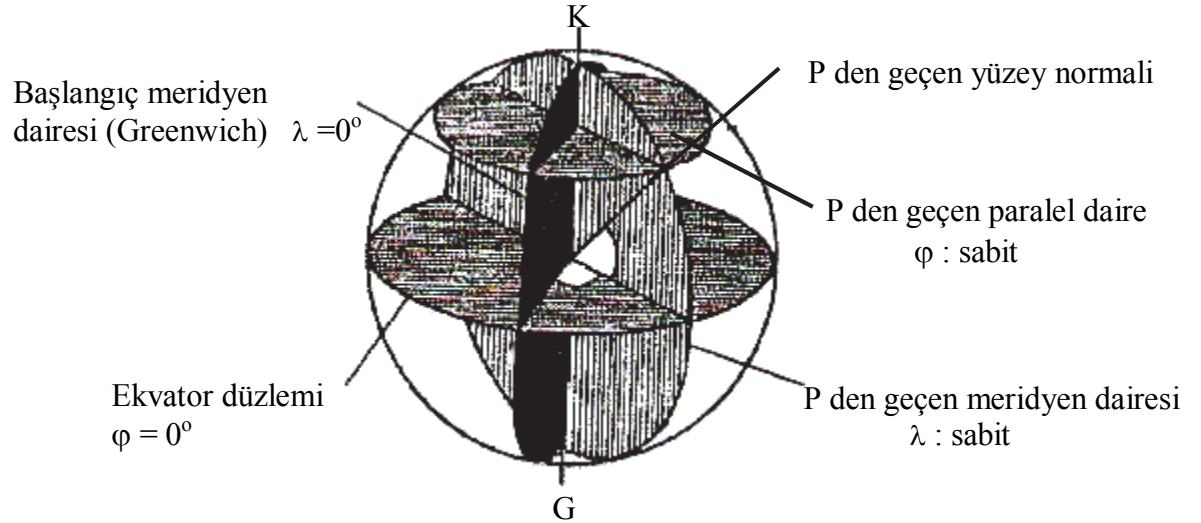
3. KÜRESEL KOORDİNAT SİSTEMLERİ

Küresel koordinat sistemleri küre yüzeyindeki noktaların konumlarını belirlemeye ve noktalar arasında çeşitli hesaplamaları (doğrultu,uzaklık gibi) yapmaya olanak sağlar. Küresel koordinat sistemlerini üç grup halinde inceleyebiliriz [4],[7].

- Küresel coğrafi koordinatlar (φ, λ)
- Kartezyen (global) dik koordinatlar (X, Y, Z)
- Küresel jeodezik dik (x, y) ve jeodezik kutupsal koordinatlar (S, α)

3.1. Coğrafi Koordinatlar

Dünya üzerindeki noktaların konumlarını belirlemek amacıyla bütün dünyayı saran bir koordinat ağı tasarlanmıştır (şekil-7). Coğrafi koordinat ağı denilen bu sistem paralel ve meridyenlerden oluşur. Dünyayı kuzey ve güney yarım küreler olarak ikiye ayıran ekvator düzlemine paralel düzlemlerin yerküre ile arakesitleri paralel daireleri oluşturur.



Şekil –7 Coğrafi koordinatlar

Ekvatorun kuzeyinde kalan paralellere kuzey paraleli, güneyinde kalan dairelere güney paraleli denir. Paralel daireler kuzeyde ve güneyde 90 ar tane olmak üzere 180 tanedirler. Ekvatoru dik olarak kesen, kutuplardan ve yerin merkezinden geçen düzlemlerin yerküre ile arakesitleri de meridyen dairelerini oluşturur. Londra’da

Greenwich gözleminde bulunan bir gök dürbününün ekseninden geçtiği varsayılan meridyen, başlangıç meridyenidir. Başlangıç meridyeninin doğusunda bulunanlara doğu meridyeni, batısında kalanlara batı meridyeni denir. Meridyenler 180 tanesi doğu ve 180 tanesi batıda olmak üzere 360 tanedir.

Küre üzerindeki bir P noktasının φ enlemi o noktadaki yüzey normalinin ekvator düzlemi ile yaptığı açıdır. Başka bir deyişle noktanın ekvatora meridyen boyunca olan uzaklığını yer merkezinde gören açığa o noktanın enlemi denir ve φ ile gösterilir. Bir noktadan geçen meridyen düzlemi ile başlangıç meridyen düzlemi arasında kalan açığa da o noktanın boylamı denir. 1° aralıkla geçen meridyenler arasında zaman farkı 4 dakikadır. Boylamlar λ ile gösterilir. λ boylamı; Greenwich'ten doğuya doğru pozitif ve batıya doğru negatif olmak üzere 0° ile $\pm 180^\circ$ arasında değişir. φ enlemi ise ekvatorдан kuzey kutbuna doğru (+), güney kutbuna doğru (-) olmak üzere 0° ile $\pm 90^\circ$ arasında değişir.

Coğrafi Koordinatlarla Temel Ödevlerin Çözümü

Coğrafi koordinatlarla temel ödev çözümlerinde kenarların doğrultu değerleri için azimut açısı (A) kullanılır. Azimut açısı, bir kenarın o noktadaki meridyen doğrultusu ile saat ibresi yönünde yaptığı açıdır. Açıklık açısı (α) verilirse o noktadaki meridyen konvergansinden (γ) yararlanılarak azimut açısına çevrilir ($A = \alpha + \gamma$). Küre yüzeyinde açıklık açısı ve meridyen konvergensi için Soldner koordinat sistemine bakınız[4],[7],[20].

Coğrafi Koordinatlarla I. Temel Ödev:

Verilenler: $P_1(\varphi_1, \lambda_1)$, s, A_{12}

İstenenler: $P_2(\varphi_2, \lambda_2)$, A_{21}

uzunluk olarak verilen kenarın açısal karşılığı

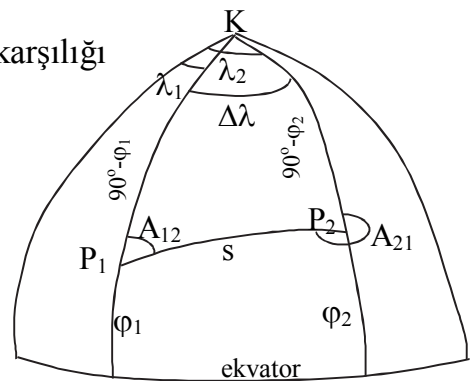
$$\sigma = \frac{s}{R} \rho$$

$$\varphi_2 = \arcsin(\sin \varphi_1 \cos \sigma + \cos \varphi_1 \sin \sigma \cos A_{12})$$

$$\Delta \lambda = \arctan\left(\frac{\sin A_{12}}{\cot \sigma \cos \varphi_1 - \sin \varphi_1 \cos A_{12}}\right)$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta \lambda$$

$$A_{21} = \arctan\left(\frac{\sin A_{12}}{\cos \sigma \cos A_{12} - \tan \varphi_1 \sin \sigma}\right) + \pi$$



Şekil-8

Örnek-1:

Verilenler:

$$\varphi_1 = 39^\circ 30' 18'' , \lambda_1 = 39^\circ$$

$$s = 69912.6736 \text{ m}$$

$$A_{12} = 141^\circ 48' 41.2706''$$

İstenenler:

$$\varphi_2, \lambda_2, A_{21}$$

$$R = 6374249.664 \text{ m}$$

Çözüm:

$$\sigma = \frac{s}{R} \rho$$

$$\varphi_2 = \arcsin(\sin \varphi_1 \cos \sigma + \cos \varphi_1 \sin \sigma \cos A_{12})$$

$$\Delta \lambda = \arctan\left(\frac{\sin A_{12}}{\cot \sigma \cos \varphi_1 - \sin \varphi_1 \cos A_{12}}\right)$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta \lambda$$

$$A_{21} = \arctan\left(\frac{\sin A_{12}}{\cos \sigma \cos A_{12} - \tan \varphi_1 \sin \sigma}\right) + \pi$$

$$\sigma = 0.6284192404^\circ$$

$$\varphi_2 = 39^\circ 00' 36'' , \lambda_2 = 39^\circ 30'$$

$$\Delta \lambda = 30'$$

$$A_{21} = 322^\circ 07' 40.3376''$$

olarak bulunur.

Coğrafi Koordinatlarla II. Temel Ödev:Verilenler: $P_1(\varphi_1, \lambda_1), P_2(\varphi_2, \lambda_2)$ İstenenler: s, A_{12}, A_{21}

$$\sigma = \arccos(\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \Delta \lambda)$$

$$A_{12} = \arctan\left(\frac{\sin \Delta \lambda}{\tan \varphi_2 \cos \varphi_1 - \sin \varphi_1 \cos \Delta \lambda}\right)$$

$$A_{21} = \arctan\left(\frac{\sin \Delta \lambda}{\cos \Delta \lambda \sin \varphi_2 - \cos \varphi_2 \tan \varphi_1}\right) + \pi$$

Örnek-2:

Verilenler:

$$\varphi_1 = 39^\circ 30' 18'' , \lambda_1 = 39^\circ$$

$$\varphi_2 = 39^\circ 00' 36'' , \lambda_2 = 39^\circ 30'$$

İstenenler:

$$s, A_{12}, A_{21}$$

$$R = 6374249.664 \text{ m}$$

Çözüm için yukarıdaki eşitlikleri kullanırsak,

$$s = 69912.6736 \text{ m}$$

$$A_{12} = 141^\circ 48' 41.2706'' \quad A_{21} = 322^\circ 07' 40.3376'' \text{ olarak bulunur.}$$

Uyarı: Küre yüzeyinde ikinci temel ödev hesaplamalarında azimut açısı bulunurken tıpkı düzlem trigonometride olduğu gibi koordinat farklarına göre bölge irdelemesinin yapılması gerekir.

Küre yüzeyinde Azimut hesabının direkt formüllerle yapılması

Küre yüzeyinde irdeleme yapmaksızın direkt azimut açısı bulmak için aşağıdaki I, II ve III ara değerleri hesaplanır [31](*).

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$$

$$I = \sin\Delta\lambda$$

$$II = \tan\phi_2 \cos\phi_1 - \sin\phi_1 \cos\Delta\lambda$$

$$III = \tan\phi_1 \cos\phi_2 - \sin\phi_2 \cos(\Delta\lambda)$$

$$A_{12} = 2 \cdot \arctan\left(\frac{I}{II - \sqrt{I^2 + II^2}}\right) + 180^\circ$$

A_{21} azimutu için

$$A_{21} = 2 \cdot \arctan\left(\frac{I}{-III + \sqrt{I^2 + III^2}}\right) + 180^\circ$$

*(BEKTAŞ,2019), "Direct bearing angles determination on globe," *MOJ Civil Engineering*, vol. 5, no. 4, pp. 78–80, Dec. 2019.

Örnek-3: Örnek-2 deki problemi direkt formüllerle çözersek

Verilenler:

$$\phi_1 = 39^\circ 30' 18'', \quad \lambda_1 = 39^\circ$$

$$\phi_2 = 39^\circ 00' 36'', \quad \lambda_2 = 39^\circ 30'$$

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 30' = 0.5^\circ$$

$$I = \sin \Delta\lambda = 0.008726535$$

$$II = \tan\phi_2 \cos\phi_1 - \sin\phi_1 \cos\Delta\lambda = -0.011094015$$

$$III = \tan\phi_1 \cos\phi_2 - \sin\phi_2 \cos(\Delta\lambda) = -0.011220985$$

İstenenler:

$$s, \quad A_{12}, \quad A_{21}$$

$$R = 6374249.664 \text{ m}$$

$$A_{12} = 2.\arctan\left(\frac{I}{II - \sqrt{I^2 + II^2}}\right) + 180^\circ$$

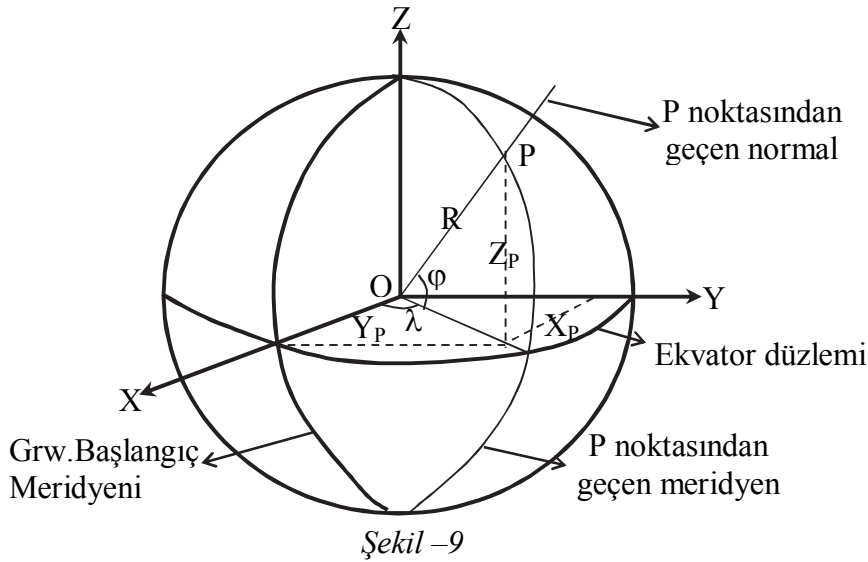
$$A_{21} = 2.\arctan\left(\frac{I}{-III + \sqrt{I^2 + III^2}}\right) + 180^\circ$$

Formüllerini kullanarak Azimut hesabını direkt olarak aşağıdaki gibi gerçekleştirebiliriz.

$$A_{12} = 141.81146^\circ = 141^\circ 48' 41.2706''$$

$$A_{21} = 322.12787^\circ = 322^\circ 07' 40.3376'' \text{ olarak bulunur.}$$

3.2. Kartezyen (Global, Geosentrik) Koordinat Sistemi



Şekil -9

Kartezyen koordinat sisteminde de küre yüzeyindeki noktaların konumunu belirlemek mümkündür. Yakın geçmişe kadar fazla rağbet görmeyen bu koordinat sistemi uydu jeodezisi (GPS gibi) çalışmalarının yaygınlaşmasıyla nispeten güncellik kazanmıştır. Bu sistemde kürenin merkezine yerleştirilmiş bir XYZ üç boyutlu dik koordinat sisteminde noktaların konumları tanımlanabilmektedir. Kartezyen koordinat sisteminin orijini kürenin merkezinde, Z eksenini kürenin dönme ekseninden geçip, X ve Y eksenleri ekvator düzlemlerinde olup ayrıca X ekseninin başlangıç (Greenwich) meridyeni düzleminde geçtiği varsayılır. Küre yüzeyi üzerindeki bütün noktalar $X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2$ küre denklemini sağlar [4],[7].

Kartezyen ve Coğrafi Koordinatlar Arasında Dönüşümler

Küresel coğrafi koordinatlar verildiğinde global dik koordinatlar yukarıdaki şekil-9 dan aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$P(\varphi, \lambda) \Rightarrow P(X_p, Y_p, Z_p)$$

$$X_p = R \cos \varphi \cos \lambda$$

$$Y_p = R \cos \varphi \sin \lambda$$

$$Z_p = R \sin \varphi$$

Global dik koordinatlar verildiğinde ise küresel coğrafi koordinatlar eldesi aşağıdaki gibi olur.

$$P(X_p, Y_p, Z_p) \Rightarrow P(\varphi, \lambda)$$

$$R = \sqrt{X_p^2 + Y_p^2 + Z_p^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{Z_p}{\sqrt{X_p^2 + Y_p^2}} \text{ ya da } \sin \varphi = \frac{Z_p}{R}$$

$$\lambda = \arctan (Y_p / X_p) \quad X_p \geq 0$$

$$\lambda = 180^\circ + \arctan (Y_p / X_p) \quad X_p < 0 \text{ ve } Y_p \geq 0$$

$$\lambda = -180^\circ + \arctan (Y_p / X_p) \quad X_p < 0 \text{ ve } Y_p < 0$$

Örnek-4: Aşağıda küre yüzeyindeki dört noktanın coğrafi koordinatlarıyla beraber Global dik koordinatları listelenmiştir. (R= 6374249.664m.)

Nokta	φ	λ	X	Y	Z
1	39° 30' 18"	39° 00' 00"	3822138.983	3095107.121	4054950.589
2	39° 00' 36"	39° 30' 00"	3821873.675	3150509.533	4012309.818
3	40° 00' 09"	39° 30' 36"	3767130.765	3106487.390	4097501.760
4	40° 30' 36"	39° 12' 00"	3755609.504	3063000.371	4140589.905

3.3. Küresel Jeodezik Dik Koordinat Sistemleri

Küresel jeodezik dik koordinat sistemleri kendi içinde aşağıdaki gibi

- 1) Soldner (Meridyeni esas alan dik) koordinat sistemi
- 2) Ekvatoru esas alan dik koordinat sistemi
- 3) Büyük daireyi esas alan dik koordinat sistemi

olmak üzere üçe ayrılmaktadır. Meridyen ve ekvator sistemleri büyük daire sisteminin özel halleridir. Küresel jeodezik dik koordinat sistemlerinde referans alınan daireye ilgili noktadan indirilen dik (büyük daire yayı biçiminde), noktanın jeodezik dik koordinatlarını belirler (şekil-10). Ekvator sistemindeki jeodezik koordinatlar coğrafi koordinatların metrik karşılıklarıdır.

Küresel jeodezik dik koordinat sistemlerinden hangisinin tercih edileceğini genellikle çalışma yapılan bölgenin konumu belirler. Bu şekilde tercih yapılırsa küçük koordinatlarla çalışma imkanı doğar. Ayrıca projeksiyon yapılması söz konusu ise deformasyonların aşırı olmaması için çalışma bölgesinin sınırlı tutulması diğer bir deyişle referans daireden fazla uzaklaşmamak gerekir. Çalışma bölgesinin büyüklüğü buna imkan vermiyorsa birden fazla koordinat sistemi oluşturulur. Örneğin Soldner sistemi kullanılıyorsa çalışma bölgesinin büyüklüğüne göre farklı meridyen sistemleri seçilir. Bu nedenlerle, ekvator sistemini ekvator boyunca uzanan ülkelerde, meridyen sistemini bir meridyen boyunca uzanan ülkelerde, büyük daire sistemi ise genel hal olduğu için her bölgede ve özellikle coğrafi koordinatlara göre diagonal biçimde uzanan bölgelerde tercih etmek uygun olur. Söz konusu büyük dairenin tek anlamlı olarak belirlenebilmesi için ekvatoru kestiği noktanın boylamı ile bu noktadaki meridyenle yaptığı açının (azimutun) bilinmesi ya da hesaplanabilmesi gerekir.

Şekil-10 da bir P noktasının koordinatları çeşitli jeodezik dik koordinat sistemlerinde gösterilmektedir.

Coğrafi koordinatlar $P(\varphi, \lambda)$

P_0 noktası başlangıçlı Soldner koordinatları $P(X_s, Y_s)$

P_0 noktası başlangıçlı Ekvator Sistemi koordinatları $P(X_e, Y_e)$

B noktası başlangıçlı Büyük Daire Sistemi koordinatları $P(X_b, Y_b)$

3.4. Soldner Sisteminde Temel Ödev Çözümleri

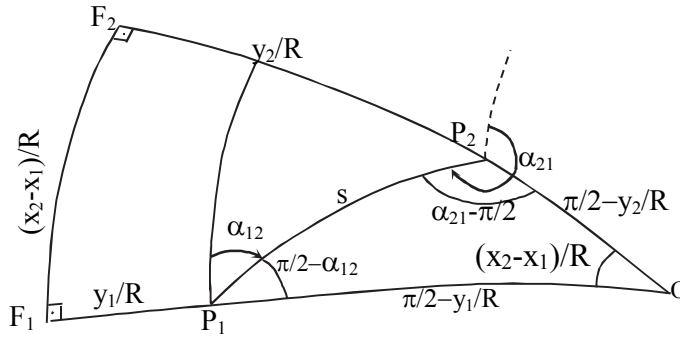
I. Temel Ödev:

Jeodezik dik koordinatlarla temel ödev çözümlerinde açıklık açısı (α) kullanılır. Azimut açısı verilirse o noktadaki meridyen konvergensinden yararlanılarak açıklık açısına ($\alpha = A - \gamma$) çevrilir [7],[20].

Verilenler: $P_1(y_1, x_1)$, s , α_{12}

İstenenler: $P_2(y_2, x_2)$, α_{21}

Çözüm: P_1P_2O küresel üçgeninde kosinüs ve kotanjant teoremleri uygulanırsa;



Şekil-12

$$y_2 = R \arcsin \left\{ \cos \frac{s}{R} \sin \frac{y_1}{R} + \sin \frac{s}{R} \cos \frac{y_1}{R} \sin \alpha_{12} \right\}$$

$$x_2 = x_1 + R \arctan \left(\frac{\cos \alpha_{12}}{\cot \frac{s}{R} \cos \frac{y_1}{R} - \sin \frac{y_1}{R} \sin \alpha_{12}} \right)$$

$$\alpha_{21} = \arctan \left(\frac{\cos \frac{s}{R} \sin \alpha_{12} - \tan \frac{y_1}{R} \sin \frac{s}{R}}{\cos \alpha_{12}} \right)$$

Örnek-5:

Verilenler;

$$x_1 = 4394996.195 \text{ m}$$

$$y_1 = 0.000 \text{ m}$$

$$\alpha_{12} = 141^\circ 48' 41.2706''$$

$$s = 69912.6734\text{m} \quad (R= 6374249.664\text{m})$$

İstenenler: y_2, x_2, α_{21} **Çözüm:** Yukarıdaki y_2, x_2, α_{21} formülleri kullanılırsa

$$y_2 = 43223.055\text{m}$$

$$x_2 = 4340045.347\text{m}$$

$$\alpha_{21} = 321^\circ 48' 47.2990''$$

olarak bulunur.

II. Temel Ödev:Verilenler: $P_1(y_1, x_1), P_2(y_2, x_2)$ İstenenler: $s, \alpha_{12}, \alpha_{21}$ Şekil-15 deki P_1P_2O küresel üçgeninde kenar kosinüs ve sinüs teoremleri uygulanırsa;

$$s = R \arccos \left\{ \sin \frac{y_1}{R} \sin \frac{y_2}{R} + \cos \frac{y_1}{R} \cos \frac{y_2}{R} \cos \frac{\Delta x}{R} \right\}$$

$$\alpha_{12} = \arccos \left\{ \frac{\sin \frac{\Delta x}{R} \cos \frac{y_2}{R}}{\sin \frac{s}{R}} \right\}$$

$$\alpha_{21} = \arccos \left\{ \frac{\sin \frac{\Delta x}{R} \cos \frac{y_1}{R}}{\sin \frac{s}{R}} \right\} + \pi$$

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Örnek-6:

Verilenler:

Nokta	y	x
1	0.000	4394996.195
2	43223.055	4340045.347 (R= 6374249.664m)

İstenenler: s, α_{12} , α_{21} **Çözüm:** Yukarıdaki s, α_{12} , α_{21} formülleri kullanılırsa

$$s = 69912.6734\text{m}$$

$$\alpha_{12} = 141^\circ 48' 41.2706''$$

$$\alpha_{21} = 321^\circ 48' 47.2990''$$

olarak bulunur.

3.5. Soldner Sisteminde Temel Ödevlerin Serilerle Çözümü

Jeodezik temel ödev çözümlerinde kullanılan kenarlar her zaman 50 km den ve ordinat değerleri de 200km den küçük olduğundan karşılıkları olan açı değerleri de çok küçük olacağından bunların trigonometrik fonksiyonları yerine seri açılımlarının aşağıdaki gibi ilk iki terimlerinin alınması yeterli olur.

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \qquad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

Daha önce temel ödev çözümleri için bulunan eşitliklerde bu düzenlemeler yapılarak temel ödev çözümleri gerçekleştirilebilir [4],[20],[28].

Serilerle I. Temel Ödev ÇözümüVerilenler: $P_1 (x_1, y_1)$, s, α_{12} İstenenler: $P_2(x_2, y_2)$, α_{21}

Soldner koordinatlarıyla I. temel ödev çözüm eşitliklerinde seri açılımları kullanılırsa

$$y_2 = y_1 + s \sin \alpha_{12} - \frac{y_1 u^2}{2R^2} - \frac{v u^2}{6R^2} \qquad v = s \sin \alpha_{12}$$

$$x_2 = x_1 + s \cos \alpha_{12} + \frac{u \cdot y_2^2}{2R^2} - \frac{u \cdot v^2}{6R^2} \quad u = s \cos \alpha_{12}$$

$$\alpha_{21} = \alpha_{12} - \frac{\rho}{2R^2} (y_1 + y_2)(x_2 - x_1) \pm \pi$$

olur. Yukarıdaki eşitliklerde küresel düzeltmeler olarak aşağıdaki kısaltmaları kullanırsak

$$\delta y = - \frac{u^2}{2R^2} \left(y_1 + \frac{v}{3} \right) \quad \delta x = \frac{u}{2R^2} \left(y_2^2 - \frac{v^2}{3} \right)$$

$$\delta \alpha = - \frac{u}{R^2} \rho \left(y_1 + \frac{v}{2} \right)$$

P_2 noktasının koordinatları ve karşı semt, $\delta y, \delta x$ ve $\delta \alpha$ küresel düzeltmeleriyle,

$$y_2 = y_1 + v + \delta y$$

$$x_2 = x_1 + u + \delta x$$

$$\alpha_{21} = \alpha_{12} + \delta \alpha \pm \pi$$

olur.

Küre yüzeyindeki I.temel ödev eşitliklerinin düzlem eşitliklere benzerliği açıkça görülmektedir. Düzlemi yarıçapı sonsuz olan bir küre düşünürsek diğer bir deyişle $R = \infty$ alırsak yukarıdaki eşitlikler (küresel düzeltmeler sıfır olacağından) düzlem eşitliklere döner. $\alpha = 90^\circ$ veya 270° olması ya da kenarın ordinat dairesi üstünde olması halinde tüm küresel düzeltmeler sıfır olur. Kenar (s) ve ordinat (y_1) değerlerinin 4km nin altında kalması halinde küresel düzeltmeler $\delta y, \delta x$ ve $\delta \alpha$ çok küçük (<1 mm) olacaklarından düzlem hesap yapmak yeterli olur.

Örnek-7:

Verilenler;

$$x_1 = 4394996.195 \text{ m} \quad y_1 = 0.000 \text{ m}$$

$$\alpha_{12} = 141^\circ 48' 41.2706'' \quad s = 69912.6734 \text{ m} \quad (R = 6374249.664 \text{ m})$$

İstenenler : y_2, x_2, α_{21}

Çözüm:

$$v = s \sin \alpha_{12} = 43223.5903\text{m} \quad u = s \cos \alpha_{12} = -54950.0058$$

$$\delta y = -\frac{u^2}{2R^2} \left(y_1 + \frac{v}{3} \right) \quad \delta x = \frac{u}{2R^2} \left(y_2^2 - \frac{v^2}{3} \right)$$

$$\delta \alpha = -\frac{u}{R^2} \rho \left(y_1 + \frac{v}{2} \right)$$

$$\delta y = -0.5354\text{m} \quad \delta x = -0.8422\text{m} \quad \delta \alpha = 6.0287''$$

$$y_2 = y_1 + v + \delta y = 43223.055 \text{ m}$$

$$x_2 = x_1 + u + \delta x = 4340045.347 \text{ m}$$

$$\alpha_{21} = \alpha_{12} + \delta \alpha \pm \pi = 321^{\circ}48'47.2990''$$

Serilerle II. Temel Ödev Çözümü

Verilenler: $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$

İstenenler: s , α_{12} , α_{21}

Çözüm için Soldner koordinatlarıyla II. temel ödev çözüm eşitliklerinde seri açılımları kullanılırsa

$$v \rightarrow \Delta y = y_2 - y_1$$

$$u \rightarrow \Delta x = x_2 - x_1$$

$$\delta y_{12} = -\frac{\Delta x^2}{2R^2} \left(y_1 + \frac{\Delta y}{3} \right) \quad \delta x_{12} = \frac{\Delta x}{2R^2} \left(y_2^2 - \frac{\Delta y^2}{3} \right)$$

$$\tan \alpha_{12} = \frac{v}{u} = \frac{y_2 - y_1 - \delta y_{12}}{x_2 - x_1 - \delta x_{12}}$$

$$s = \frac{y_2 - y_1 - \delta y_{12}}{\sin \alpha_{12}} = \frac{x_2 - x_1 - \delta x_{12}}{\cos \alpha_{12}} = \sqrt{(\Delta y - \delta y)^2 + (\Delta x - \delta x)^2}$$

$$\delta \alpha_{12} = -\frac{\Delta x}{R^2} \rho \left(y_1 + \frac{\Delta y}{2} \right)$$

$$\alpha_{21} = \alpha_{12} + \delta \alpha_{12} \pm \pi = \alpha_{12} - \frac{\Delta x}{R^2} \rho \left(y_1 + \frac{\Delta y}{2} \right) \pm \pi$$

Örnek-8:

Verilenler:

Nokta	y	x
1	0.000	4394996.195
2	43223.055	4340045.347 (R= 6374249.664m)

İstenenler: s, α_{12} , α_{21} **Çözüm:** Yukarıdaki eşitliklerden δy_{12} δx_{12} $\delta \alpha_{12}$ değerleri hesaplanır.

$$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \Delta x = x_2 - x_1$$

$$\delta y_{12} = -\frac{\Delta x^2}{2R^2} \left(y_1 + \frac{\Delta y}{3} \right) = -0.5354\text{m} \quad \delta x_{12} = \frac{\Delta x}{2R^2} \left(y_2^2 - \frac{\Delta y^2}{3} \right)$$

$$\delta \alpha_{12} = -\frac{\Delta x}{R^2} \rho \left(y_1 + \frac{\Delta y}{2} \right)$$

$$\tan \alpha_{12} = \frac{v}{u} = \frac{y_2 - y_1 - \delta y_{12}}{x_2 - x_1 - \delta x_{12}} \Rightarrow \alpha_{12} = 141^\circ 48' 41.2706''$$

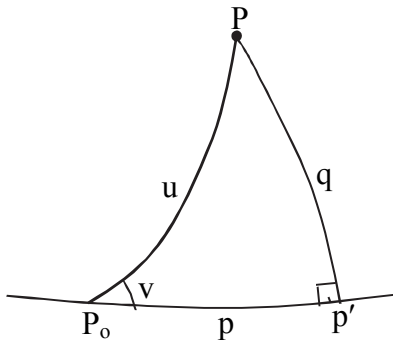
$$\alpha_{21} = \alpha_{12} + \delta \alpha_{12} \pm \pi = 321^\circ 48' 47.2990''$$

$$s = \frac{y_2 - y_1 - \delta y_{12}}{\sin \alpha_{12}} = \frac{x_2 - x_1 - \delta x_{12}}{\cos \alpha_{12}} \Rightarrow s = 69912.6734\text{m}$$

Küre yüzeyinde jeodezik kutupsal koordinatlar

Düzlemde olduğu gibi küre yüzeyinde de bir noktanın konumu hem dik hem de kutupsal koordinatlarla gösterilebilmektedir.

- 1) Küresel jeodezik kutupsal koordinat sistemi
- 2) Küresel jeodezik dik koordinat sistemi



Bir P_0 başlangıç noktasına göre küre üzerindeki bir P noktası (u,v) kutupsal olarak (p,q) ile dik koordinat olarak tanımlanabilmektedir.

Küresel Jeodezik Dik ve Kutupsal Koordinatların Birbirine Dönüştürülmesi

Dik koordinatlardan kutupsal koordinatlara dönüşüm $(p, q) \rightarrow (u, v)$

$$u = R \arccos\left(\cos \frac{p}{R} \cos \frac{q}{R}\right)$$

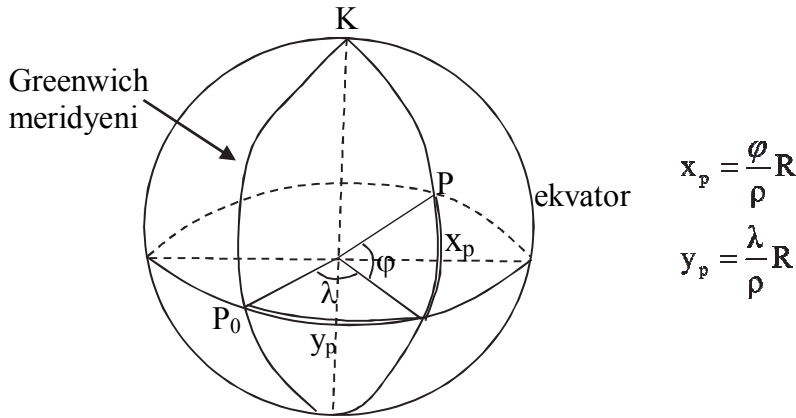
$$v = \arctan\left(\frac{\tan \frac{q}{R}}{\sin \frac{p}{R}}\right) = \arccos\left(\cot \frac{u}{R} \tan \frac{p}{R}\right)$$

Kutupsal koordinatlardan dik koordinatlara dönüşüm $(u, v) \rightarrow (p, q)$

$$q = R \arcsin\left(\sin \frac{u}{R} \sin v\right)$$

$$p = R \arctan\left(\tan \frac{u}{R} \cos v\right) = R \arcsin\left(\tan \frac{q}{R} \cot v\right)$$

Ekvatoru Esas Alan Dik Koordinat Sistemi



$$x_p = \frac{\varphi}{\rho} R$$

$$y_p = \frac{\lambda}{\rho} R$$

Ekvator sistemi, coğrafi koordinat sisteminin metrik karşılığının kullanıldığı bir jeodezik dik koordinat sistemidir. Bu sistemde bir P noktasının x değeri, ilgili P noktasından ekvatora meridyen boyunca olan uzaklığıdır. P noktasından ekvatora indirilen dikin ayağının ekvator üzerinde P_0 başlangıç noktasına olan uzaklığı da y değeri olur.

Ekvator Sisteminde I. Temel Ödev:

Ekvator sistemindeki temel ödev hesaplamaları, aynı coğrafi koordinatlarda olduğu gibi yapılabilir.

Verilenler: $P_1(y_1, x_1)$, s , A_{12}

İstenenler: $P_2(y_2, x_2)$, A_{21}

$$x_2 = R \arcsin \left(\sin \frac{x_1}{R} \cos \frac{s}{R} + \cos \frac{x_1}{R} \sin \frac{s}{R} \cos A_{12} \right)$$

$$y_2 = y_1 + R \arctan \left(\frac{\sin A_{12}}{\cot \frac{s}{R} \cos \frac{x_1}{R} - \sin \frac{x_1}{R} \cos A_{12}} \right)$$

$$A_{21} = \arctan \left(\frac{\sin A_{12}}{\cos A_{12} \cos \frac{s}{R} - \sin \frac{s}{R} \tan \frac{x_1}{R}} \right) + \pi$$

Ekvator Sisteminde II. Temel Ödev:

Verilenler: $P_1(y_1, x_1)$, $P_2(y_2, x_2)$

İstenenler: s , A_{12} , A_{21}

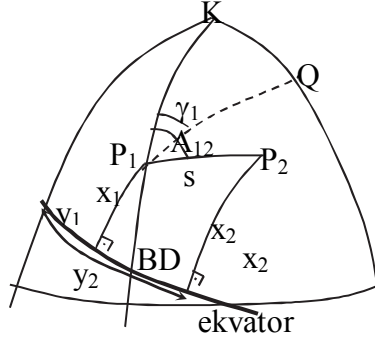
$$s = R \arccos \left(\sin \frac{x_1}{R} \sin \frac{x_2}{R} + \cos \frac{x_1}{R} \cos \frac{x_2}{R} \cos \frac{\Delta y}{R} \right)$$

$$A_{12} = \arctan \left(\frac{\sin \frac{\Delta y}{R}}{\tan \frac{x_2}{R} \cos \frac{x_1}{R} - \sin \frac{x_1}{R} \cos \frac{\Delta y}{R}} \right)$$

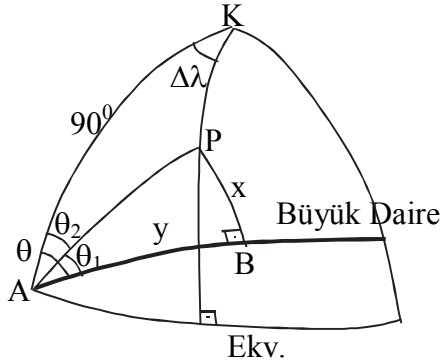
$$A_{21} = \arctan \left(\frac{\sin \frac{\Delta y}{R}}{\cos \frac{\Delta y}{R} \sin \frac{x_2}{R} - \cos \frac{x_2}{R} \tan \frac{x_1}{R}} \right) + \pi$$

için yararlı olabilmektedir. Bir büyük dairenin küre üzerinde belirli olabilmesi için ya üzerindeki iki noktanın koordinatlarının bilinmesi ya da ekvatoru kestiği noktanın boylamı ile o noktada meridyenle yaptığı açının (θ) bilinmesi yeterlidir.

Büyük daire sistemindeki temel ödevler, aynen ekvator sisteminde olduğu gibi yapılabilir.



Herhangi bir büyük daire sisteminde koordinatları verilen bir P noktasının coğrafi koordinatlarının hesaplanması



Verilenler: λ_A ve θ açısı, $P(y,x)$

İstenenler: $P(\varphi, \lambda)$

ABP küresel dik üçgeninde;

$$\cos \widehat{AP} = \cos \frac{y}{R} \cos \frac{x}{R}$$

$$\cot \theta_1 = \frac{\sin \frac{y}{R}}{\tan \frac{x}{R}} \Rightarrow \tan \theta_1 = \frac{\tan \frac{x}{R}}{\sin \frac{y}{R}}$$

$$\theta_2 = \theta - \theta_1$$

AKP küresel üçgeninde, kotanjant teoreminden

$$\cot \Delta \lambda = \frac{\cot \widehat{AP}}{\sin \theta_2} \Rightarrow \lambda_p = \lambda_A + \Delta \lambda$$

AKP küresel üçgeninde sinüs teoreminden

$$\cos \varphi_p = \frac{\sin \theta_2 \widehat{\sin AP}}{\sin \Delta \lambda}$$

Örnek-12: Bir büyük daire sisteminde ($\lambda_A = 0^\circ$ ve $\theta = 30^\circ$) P noktasının koordinatları,

$$y = 127243.612 \text{ m}$$

$$x = 154.343 \text{ m (R = 6373924.115 m)}$$

olarak veriliyor. P noktasının coğrafi koordinatlarını bulunuz.

y, x koordinatlarının açısall karşılıkları

$$\frac{y}{R} \rho^\circ = 1.14380432^\circ \quad \frac{x}{R} \rho^\circ = 0.001387403166^\circ$$

$$\cos \widehat{AP} = \cos y \cos x \Rightarrow \widehat{AP} = 1.143805263^\circ$$

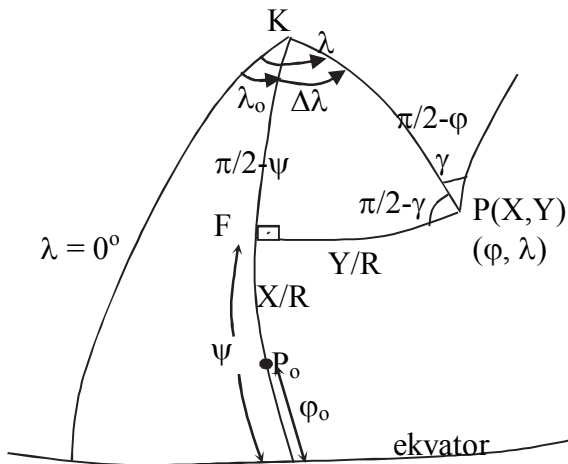
$$\tan \theta_1 = \frac{\tan x}{\sin y} \Rightarrow \theta_1 = 0.06950278623^\circ$$

$$\theta_2 = \theta - \theta_1 = 29.93049721^\circ$$

$$\tan \Delta \lambda = \sin \theta_2 \tan \widehat{AP} \Rightarrow \Delta \lambda = 0.5707575247^\circ = 0^\circ 34' 14.73'' = \lambda_p$$

$$\cos \varphi_p = \frac{\sin \theta_2 \widehat{\sin AP}}{\sin \Delta \lambda} \Rightarrow \varphi_p = 0.9912369645^\circ = 0^\circ 59' 28.45''$$

Soldner Koordinatlarıyla Coğrafi Koordinatlar Arasında Dönüşümler



Şekil-14

$P_0(\varphi_0, \lambda_0)$ başlangıçlı bir Soldner koordinat sisteminde koordinatları Y, X olan bir noktanın coğrafi koordinatlarının eldesi ya da bu işlemin tersi aşağıdaki gibi gerçekleştirilir. Çözüm şekil-14 deki KFP küresel dik üçgeninden yapılır [16].

a) Jeodezik Dik Koordinatlardan Coğrafi Koordinatların Eldesi

Bu dönüşüm probleminde P noktasının $P_o(\varphi_o, \lambda_o)$ başlangıçlı jeodezik dik koordinat sistemindeki (Y, X) koordinatlarından (φ, λ) coğrafi koordinatları istenmektedir.

P noktasından ana meridyene inilen dikin F ayak noktasının enlemi,

$$\psi = \varphi_o + \frac{X}{R} \quad \text{ve Neper kuralından}$$

$$\cos \psi = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{Y}{R}\right) \cot \Delta\lambda \quad \text{olur. Buradan,}$$

$$\Delta\lambda = \arctan \frac{\tan \frac{Y}{R}}{\cos \psi}$$

$$\lambda = \lambda_o + \Delta\lambda$$

Yine aynı üçgende KP kenarı için Neper uygulaması,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{Y}{R}\right) \sin \psi$$

$$\text{ve buradan,} \quad \varphi = \arcsin\left(\cos \frac{Y}{R} \sin \psi\right)$$

γ meridyen konvergensi,

$$\gamma = \arctan\left(\sin \frac{Y}{R} \tan \psi\right) = \arctan(\sin \varphi \cdot \tan \Delta\lambda)$$

Dönüşüm formülleri özet olarak aşağıdaki gibi olur;

$$\psi = \varphi_o + \frac{X}{R} \rho$$

$$\lambda = \lambda_o + \arctan\left(\frac{\tan \frac{Y}{R} \rho}{\cos \psi}\right)$$

$$\varphi = \arcsin\left(\cos \frac{Y}{R} \rho \cdot \sin \psi\right)$$

$$\gamma = \arctan\left(\sin \frac{Y}{R} \rho \cdot \tan \psi\right)$$

b) Coğrafi Koordinatlardan Jeodezik Dik Koordinatların Eldesi

Bu dönüşüm probleminde coğrafi koordinatları verilen $P(\varphi, \lambda)$ noktasının $P_o(\varphi_o, \lambda_o)$ başlangıçlı jeodezik dik koordinat sistemindeki (Y, X) koordinatları istenmektedir.

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_o$$

KFP küresel dik üçgende Neper kuralı uygulanırsa,

$$\cos \Delta\lambda = \cot \psi \cdot \cot\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

$$\psi = \arctan(\tan \varphi / \cos \Delta\lambda)$$

$$X = R \cdot (\psi - \varphi_o)$$

$$X = R \cdot \arctan(\tan \varphi / \cos \Delta\lambda) - R \cdot \varphi_o$$

$$Y = R \cdot \arcsin(\sin \Delta\lambda \cdot \cos \varphi)$$

olur.

Özet olarak uygulama formülleri aşağıdaki gibi olur,

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_o$$

$$\psi = \arctan(\tan \varphi / \cos \Delta\lambda)$$

$$X = \frac{R}{\rho} (\psi - \varphi_o)$$

$$Y = \frac{R}{\rho} \arcsin(\sin \Delta\lambda \cdot \cos \varphi)$$

$$\gamma = \arctan\left(\sin \frac{Y}{R} \rho \cdot \tan \psi\right) = \arctan(\sin \varphi \cdot \tan \Delta\lambda)$$

Örnek 13

$P_o(\varphi_o = 39^\circ, \lambda_o = 35^\circ)$ başlangıçlı Soldner jeodezik dik koordinat sisteminde koordinatları, $Y = 42765.053$ m $X = 83553.792$ m olarak verilen P noktasının coğrafi koordinatlarını bulunuz ($R = 6373924.115$ m).

$$\psi = \varphi_o + \frac{X}{R} \rho \Rightarrow \psi = 39^\circ 45' 03.86''$$

$$\lambda = \lambda_o + \arctan\left(\frac{\tan \frac{Y}{R} \rho}{\cos \psi}\right) \Rightarrow \lambda = 35^\circ 30' 00.00''$$

$$\varphi = \arcsin\left(\cos \frac{Y}{R} \rho \cdot \sin \psi\right) \Rightarrow \varphi = 39^\circ 45' 00.00''$$

$$\gamma = \arctan\left(\sin \frac{Y}{R} \rho \cdot \tan \psi\right) \Rightarrow \gamma = 19' 11.01''$$

Örnek 14

Coğrafi koordinatlardan jeodezik dik koordinatların eldesi

Verilenler: Bir P noktasının coğrafi koordinatları

$\varphi = 39^\circ 45' 00''$ $\lambda = 35^\circ 30' 00''$ şeklinde verilmektedir ($R = 6373924.115$ m).

İstenenler: $P_o(\varphi_o = 39^\circ, \lambda_o = 35^\circ)$ başlangıçlı jeodezik dik koordinat sisteminde P noktasının Y, X koordinatları,

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_o \quad \Rightarrow \Delta\lambda = 0.5^\circ$$

$$\psi = \arctan(\tan \varphi / \cos \Delta\lambda) \quad \Rightarrow \psi = 39^\circ 45' 03.86''$$

$$X = \frac{R}{\rho} (\psi - \varphi_o) \quad \Rightarrow X = 83553.792 \text{ m}$$

$$Y = \frac{R}{\rho} \arcsin(\sin \Delta\lambda \cdot \cos \varphi) \quad \Rightarrow Y = 42765.053 \text{ m}$$

$$\gamma = \arctan(\sin \varphi \cdot \tan \Delta\lambda) \quad \Rightarrow \gamma = 19' 11.01''$$

4. KÜRE YÜZEYİNDE KESTİRME HESAPLARI

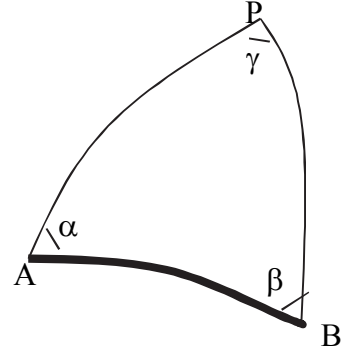
Tıpkı düzlemde olduğu gibi küre yüzeyinde de, kestirme hesapları yapmak mümkündür. Aşağıda küresel jeodezik dik koordinatlardan en çok kullanılan meridyen sisteminde (Soldner koordinatlarıyla) Önden ve geriden kestirmenin nasıl yapılacağı bütün işlem adımlarıyla gösterilmiştir.

4.1. Kürede Önden (İleriden) Kestirme

Verilenler: $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$, α, β, γ

İstenilenler: $P(x, y)$

Önden kestirme probleminin düzlemdeki çözümünde olduğu gibi kürede çözümünde de kestirilecek noktadaki γ açısının ölçülme zorunluluğu yoktur. γ açısının ölçülmesi aranan koordinatların doğruluk derecesini artırır ve ayrıca açı ölçmelerinde kontrolü sağlar.



Çözüm: Önce jeodezik dik koordinatlardan temel ödev çözümlerinden yararlanarak (AB) , (BA) açıklık açıları ile AB kenarı hesaplanır.

$$u = x_b - x_a, v = y_b - y_a$$

$$\delta_{yAB} = -\frac{u^2 y_a}{2R^2} - \frac{u^2 v}{6R^2}, \quad \delta_{xAB} = +\frac{u^2 y_b}{2R^2} - \frac{u^2 v}{6R^2}$$

olmak üzere

$$\tan(AB) = \frac{y_b - y_a - \delta_{yab}}{x_b - x_a - \delta_{xab}}$$

$$AB = \frac{y_b - y_a - \delta_{yab}}{\sin(AB)} = \frac{x_b - x_a - \delta_{xab}}{\cos(AB)}$$

eşitlikleri ile (AB) açıklık açısıyla AB kenarı kontrollü olarak bulunur.

(BA) açıklık acısı için

$$\delta_{ab} = -\frac{\rho}{2R^2}(y_a + y_b)(x_b - x_a)$$

$$(BA) = (AB) + \delta_{ab} \pm \pi$$

şeklinde hesaplanır.

Eksesi hesaplayabilmek ABP üçgeninin üç açısı da ölçülmüş olsa bile eksesi

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ$$

şeklinde ölçülen açılardan hesaplamak ölçü hataları nedeniyle pratikte doğru sonuç vermez. Bu nedenle eksenin küresel ABP üçgeninin alanından hesaplanması hatta ABP üçgenini düzlem üçgen şeklinde düşünülerek yine alanından aşağıdaki gibi hesaplanması çoğu kez yeteri doğruluğu verir.

$$F = \frac{AB^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)} \text{ ve Alandan eksis hesabı, } \varepsilon = \frac{F}{R^2} \rho$$

şeklinde ABP üçgeninin eksesi hesaplanır.

Ölçülen üçgen açılarının düzeltilmesi için iki durum söz konusudur:

a) γ açısının da ölçülmüş olması,

ölçülen açılar α , β , γ ve w da üçgen kapanması olmak üzere

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \varepsilon + w$$

eşitliği yazılabileceğinden,

düzeltilmiş açılar α' , β' , γ' olmak üzere

$$\alpha' = \alpha - \frac{w + \varepsilon}{3}, \quad \beta' = \beta - \frac{w + \varepsilon}{3}, \quad \gamma' = \gamma - \frac{w + \varepsilon}{3}$$

şeklinde bulunur.

b) γ açısı ölçülmemişse,

bu durumda üçgen kapanmasını belirlemek mümkün değildir. Ekses yukarıdaki gibi hesaplanır. γ açısı aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\gamma = 180 + \varepsilon - (\alpha + \beta)$$

ve düzeltilmiş açılar α' , β' , γ' olmak üzere

$$\alpha' = \alpha - \frac{w}{3}, \quad \beta' = \beta - \frac{w}{3}, \quad \gamma' = \gamma - \frac{w}{3}$$

şeklinde bulunur.

Üçgen kenarlarının hesaplanması düzeltilmiş açılardan yararlanarak Legendre yöntemine göre hesaplanabilir.

$$AP = AB \frac{\sin \beta'}{\sin \gamma'}, \quad BP = AB \frac{\sin \alpha'}{\sin \gamma'}$$

eşitliklerinden AP ve BP kenarları hesaplanır.

P noktasının koordinatlarının hesaplanması:

$$(AP) = (AB) - (\alpha - w / 3), \quad (BP) = (BA) + (\beta - w / 3)$$

açıklık açıları ile

$$u_A = AP \cdot \cos(AP) \quad v_A = AP \cdot \sin(AP)$$

$$u_B = BP \cdot \cos(BP) \quad v_B = BP \cdot \sin(BP)$$

hesaplanır ve küresellik düzeltmelerinin hesabı için gerekli y_p değeri için yaklaşık değer

$$y_P \cong y_A + v_A \text{ şeklinde hesaplanır.}$$

Küresellik düzeltmeleri

$$\delta_{yAP} = -\frac{u_A^2 y_A}{2R^2} - \frac{u_A^2 v_A}{6R^2}, \quad \delta_{yBP} = -\frac{u_B^2 y_B}{2R^2} - \frac{u_B^2 v_B}{6R^2},$$

$$\delta_{xAP} = +\frac{u_A y_P^2}{2R^2} - \frac{u_A v_A^2}{6R^2}, \quad \delta_{xBP} = +\frac{u_B y_P^2}{2R^2} - \frac{u_B v_B^2}{6R^2},$$

yukarıdaki gibi hesaplanır ve P noktasının aranan koordinatları aşağıdaki gibi hem A noktasından hem de B noktasından kontrollü olarak hesaplanır.

$$y_P = y_A + v_A + \delta_{yAP}, \quad y_P = y_B + v_B + \delta_{yBP}$$

$$x_P = x_A + u_A + \delta_{xAP}, \quad x_P = x_B + u_B + \delta_{xBP}$$

4.2. Kürede Geriden Kestirme

Verilenler: $A(y_A, x_A)$, $M(y_M, x_M)$, $B(y_B, x_B)$

α, β açıları

İstenilenler: $P(y_P, x_P)$

İşlem adımları:

1- $\delta_{AM}, \delta_{MA}, MA, \delta_{BM}, \delta_{MB}$ büyüklükleri hesaplanır

$$\delta_{y_{AM}} = -\frac{(x_M - x_A)^2 y_A}{2R^2} - \frac{(x_M - x_A)^2 (y_M - y_A)}{6R^2}$$

$$\delta_{x_{AM}} = +\frac{(x_M - x_A)^2 y_M}{2R^2} - \frac{(x_M - x_A)^2 (y_M - y_A)}{6R^2}$$

olmak üzere

$$\tan(AM) = \frac{y_M - y_A - \delta_{y_{AM}}}{x_M - x_A - \delta_{x_{AM}}}$$

ile (AM) bulunur.

$$\delta_{AM} = -\frac{\rho}{2R^2} (y_M + y_A)(x_M - x_A)$$

$$(MA) = (AM) + \delta_{AM} \pm \pi$$

ile (MA) hesaplanır. MA kenarı,

$$MA = \frac{y_M - y_A - \delta_{y_{AM}}}{\sin(AM)} = \frac{x_M - x_A - \delta_{x_{AM}}}{\cos(AM)}$$

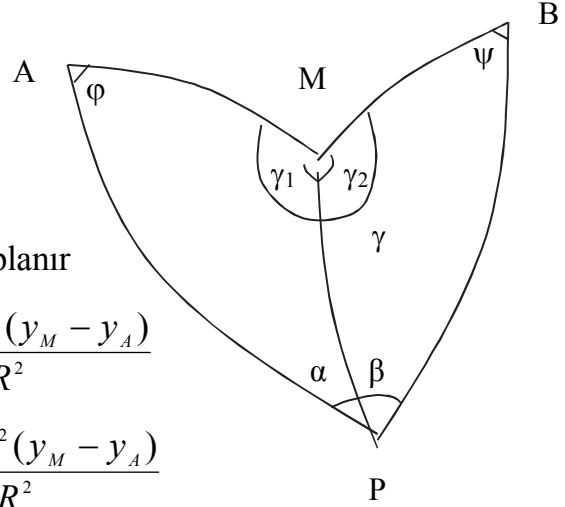
kontrollü olarak hesaplanır. (BM) , (MB) ve MB kenarı da benzer biçimde hesaplanır.

2- $\gamma = (MA) - (MB)$ ile γ açısı hesaplanır.

3- AMP ve BMP üçgenlerinde ekses, üçgenlerin düzlem alanlarından yararlanarak

$$\varepsilon_A = \frac{F_A}{R^2} \rho \quad \varepsilon_B = \frac{F_B}{R^2} \rho$$

eşitlikleri ile hesaplanır. Eğer üçgen eksesleri $\varepsilon_A, \varepsilon_B$ nin hesapla bulunması isteniyorsa (φ) ve (ψ) yaklaşık değerleri bulunur. Bunun için $(\varphi) + (\psi)$ ve $(\varphi) - (\psi)$ değerleri aşağıdaki gibi bulunur.



$$\frac{(\varphi) + (\psi)}{2} = 180^\circ - \frac{(\alpha + \beta + \gamma)}{2}$$

$$\frac{(\varphi) - (\psi)}{2} = \arctan\{\cot(45^\circ + (\lambda)) \tan \frac{(\varphi) + (\psi)}{2}\}; \quad \cot(\lambda) = \frac{MB \sin \alpha}{MA \sin \beta} = \frac{\sin(\varphi)}{\sin(\psi)}$$

yukarıdaki iki denklem taraf tarafa bir toplanıp bir de çıkarılırsa (φ) ve (ψ) değerleri bulunur.

$$\varepsilon_A = \frac{MA^2}{2} \frac{\sin(\alpha + (\varphi)) \sin(\varphi)}{\sin \alpha} \frac{\rho}{R^2}; \quad \varepsilon_B = \frac{MB^2}{2} \frac{\sin(\beta + (\psi)) \sin(\psi)}{\sin \beta} \frac{\rho}{R^2};$$

4- açıların Legendre yöntemine göre indirgenmesi ve (φ') , (ψ') yardımcı açılarının hesaplanması

$$\alpha' = \alpha - \frac{\varepsilon_A}{3}, \quad \beta' = \beta - \frac{\varepsilon_B}{3}, \quad \gamma' = \gamma - \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_B}{3}$$

olmak üzere AMP ve MBP üçgeninde S ortak kenarı da sinüs teoreminden

$$\frac{AM \sin \beta'}{BM \sin \alpha'} = \frac{\sin \psi'}{\sin \varphi'} = \tan \lambda'$$

denilerek λ' hesaplanır. Böylece

$$\frac{\varphi' + \psi'}{2} = \pi - \frac{1}{2}(\alpha' + \beta' + \gamma') \quad \text{ve} \quad \tan \frac{\varphi' - \psi'}{2} = \tan \frac{\varphi' + \psi'}{2} \cot\left(\frac{\pi}{4} + \lambda'\right)$$

eşitlikleri ile

$$\frac{\varphi' + \psi'}{2} \quad \text{ve} \quad \frac{\varphi' - \psi'}{2} \quad \text{değerleri bulunur. Bu değerlerin taraf tarafa toplanıp ve}$$

çıkarılmalarıyla

$$\varphi' = \frac{\varphi' + \psi'}{2} + \frac{\varphi' - \psi'}{2} \quad \text{ve} \quad \psi' = \frac{\varphi' + \psi'}{2} - \frac{\varphi' - \psi'}{2}$$

φ' ve ψ' elde edilir.

5- AP, BP, (AP) ve (BP) değerlerinin hesabı

$$AP = AM \frac{\sin(\alpha' + \varphi')}{\sin \alpha'}, \quad BP = BM \frac{\sin(\beta' + \psi')}{\sin \beta'}$$

$$(AP) = (AM) + \left(\varphi' + \frac{\varepsilon_A}{3}\right), \quad (BP) = (BM) - \left(\psi' + \frac{\varepsilon_B}{3}\right)$$

6- P noktasının koordinatları

$$y_P = y_A + AP \sin(AP) + \delta_{y_{AP}} = y_B + BP \sin(BP) + \delta_{y_{BP}}$$

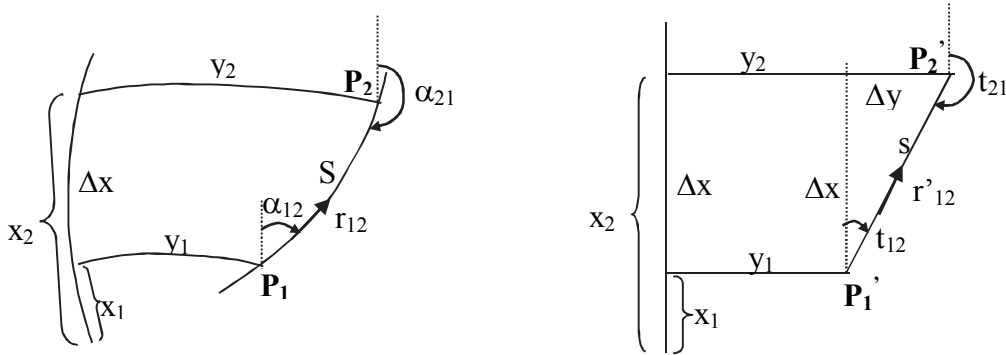
$$x_P = x_A + AP \cos(AP) + \delta_{x_{AP}} = x_B + BP \cos(BP) + \delta_{x_{BP}}$$

şeklinde bulunur.

4.3. Kürede Jeodezik Hesaplamaların Düzlem Esaslara Göre (İndirgemeyle) Yapılması

Tıpkı düzlemde olduğu gibi küre yüzeyinde de temel ödev hesapları, kestirme hesapları, poligon hesapları yapılabilir. Literatürde bu hesaplamaların nasıl yapılacağı mevcuttur. Bu bölümde farklı olarak küre yüzeyindeki jeodezik hesaplamaların düzlem esaslara göre nasıl yapılacağını göreceğiz. Küresel formülleri hiç kullanmaksızın düzlem formüllerle küresel hesaplamaların yapılabilmesi şüphesiz büyük hesap kolaylığı sağlamaktadır. Ancak bu şekildeki hesaplamalar sınırlı büyüklükteki çalışma bölgeleri için yürütülebileceği de gözardı edilmemelidir.

Küre yüzeyindeki Soldner koordinatları hiçbir değişiklik yapılmaksızın düzlem koordinatlar olarak ele alınırsa küre yüzeyinin düzleme *ordinat koruyan projeksiyonu* (Cassini-Soldner Projeksiyonu) yapılmış olur. Bu durumda küre üzerindeki P_1 ve P_2 noktalarının düzlemdeki karşılıkları P'_1 ve P'_2 olur(şekil-16). Söz konusu iki nokta arasında hesaplanacak semt, kenar değerleri her iki yüzeyde farklı olacaktır.



Şekil-16 Küre Yüzeyi Projeksiyon Yüzeyi (Düzlem)

$\Delta y = y_2 - y_1$ ve $\Delta x = x_2 - x_1$ koordinat farkları olmak üzere,

Düzlemde;

$$\tan t_{12} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad t_{21} = t_{12} \pm \pi$$

$$s = \frac{\Delta y}{\sin t_{12}} = \frac{\Delta x}{\cos t_{12}} = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta x^2}$$

Kürede;

Serilerle temel ödev eşitliklerinden (Bölüm 4.7.3.2)

$$\tan \alpha_{12} = \frac{\Delta y - \delta y}{\Delta x - \delta x} \quad \alpha_{21} = \alpha_{12} + \delta \alpha \pm \pi$$

$$S = \frac{\Delta y - \delta y}{\sin \alpha_{12}} = \frac{\Delta x - \delta x}{\cos \alpha_{12}} = \sqrt{(\Delta y - \delta y)^2 + (\Delta x - \delta x)^2}$$

Yukarıdaki eşitliklerde geçen δy , δx , $\delta \alpha$ küresellik düzeltmeleri olup aşağıdaki formüllerden hesaplanırlar.

$$\delta y = -\frac{\Delta x^2}{2R^2} \left(y_1 + \frac{\Delta y}{3} \right) \quad \delta x = \frac{\Delta x}{2R^2} \left(y_2^2 - \frac{\Delta y^2}{3} \right)$$

$$\delta \alpha = -\frac{\Delta x}{R^2} \rho \left(y_1 + \frac{\Delta y}{2} \right)$$

Küre ve düzlemde hesaplanan semt ve kenar değerleri arasındaki farklar hesaplanabilir[4], [7], [16].

$$\delta t_{12} = \alpha_{12} - t_{12} \quad : \text{semt indirgemesi}$$

$$\delta s = S - s \quad : \text{kenar indirgemesi}$$

$$\delta s = S - s = -\frac{s}{6R^2} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) \cos^2 t_{12}$$

$$\delta t_{12} = \alpha_{12} - t_{12} = \frac{\rho}{6R^2} \Delta x (2y_1 + y_2) + \frac{\rho}{6R^2} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) \sin t_{12} \cos t_{12}$$

Öte yandan semt farkları yerine doğrultu farklarının alınabileceği gerçeğinden hareketle doğrultu indirgemesinin semt indirgemesine eşit olacağı ortaya çıkar.

$$\delta r_{12} = \delta t_{12} = r_{12} - r'_{12}$$

Yukarıdaki indirgeme eşitliklerine bakıldığında indirgeme miktarlarının doğrultuya bağlı olduğu buradan Ordinat koruyan projeksiyonun konform (açı koruyan) bir projeksiyon olmadığı ortaya çıkar. Başlangıç meridyenine yakın bölgelerde bu

indirgeme farkları dikkate alınmayacak kadar küçük olmakla beraber başlangıç meridyeninden uzaklaştıkça bu farkların dikkate alınması gereği ortaya çıkar. İndirgeme miktarlarının büyüklüğü ilgili kenarın doğrultusuna ve meridyenden uzaklaşmaya bağlıdır. $\Delta x = 0$ olması ya da kenarın ordinat eksenini yönünde ($\alpha=90^\circ$ ya da 270°) olması halinde tüm indirgemeler sıfır olur. Ordinat koruyan projeksiyonun adı da buradan gelmektedir. Ayrıca tüm indirgeme eşitliklerinde geçen $1/6R^2$ terimi nedeniyle s ve t düzlem değerleri yerine S, α küresel değerlerinin indirgeme eşitliklerinde kullanılması sorun yaratmaz.

İndirgeme formüllerinde geçen noktalardan herhangi birinin sözcüğü P_2 noktasının Soldner koordinatları (x_2, y_2) şayet bilinmiyorsa, bu noktaya koordinatları bilinen bir noktadan (örneğin P_1 den) düzlem esaslara göre I.temel ödevden aşağıdaki gibi koordinat taşınabilir.

$$\begin{aligned} x_2 &\approx x_1 + S \cos \alpha_{12} & y_2 &\approx y_1 + S \sin \alpha_{12} & t_{12} &= (P_1 P_2) = \tan^{-1}(\Delta y / \Delta x) \\ x_2 &\approx x_1 + s \cos t_{12} & y_2 &\approx y_1 + s \sin t_{12} & & \end{aligned}$$

Şüphesiz bu şekilde P_2 noktasının hesaplanan koordinatları yaklaşık değerler olup sadece indirgeme işlemi için kullanılabilir.

O halde küre yüzeyinde verilen α :semt (r:doğrultu), S:kenar ölçü değerleri düzleme

$$t_{12} = \alpha_{12} - \delta t_{12}$$

$$r'_{12} = r_{12} - \delta r_{12}$$

$$s = S - \delta s$$

şeklinde indirgenerek elde edilecek düzlem değerlerle düzlem esaslara göre hesaplamalar yürütülürse bulunacak koordinatlar aynı zamanda küre yüzeyindeki Soldner koordinatları olacaktır.

Böylece düzlem hesapla küresel koordinatlar bulunmaktadır. Bu şekilde küre yüzeyindeki temel ödev hesapları, kestirme hesapları, poligon hesapları yapılabilir. Ancak bu şekildeki hesaplamalar sınırlı büyüklükteki çalışma bölgeleri için yürütülebilir.

Özet olarak küre yüzeyindeki hesaplamaları düzlem esaslara göre yapmak istersek, yapılması gereken sadece küre yüzeyindeki semt, doğrultu ve uzunluk (α , r ve S) ölçülerinin *ordinat koruyan projeksiyon* kuralına göre indirgenerek düzlem karşılıklarının (t, r' ve s) bulunması ve bu değerlerle düzlem hesap yapılmasıdır.

Küre Yüzeyinde Temel Ödevlerin İndirgemelerle Yapılması

Küre üzerindeki temel ödev çözümleri, eğer ölçüler ordinat koruyan projeksiyon kuralına göre indirgenirse düzlem esaslara göre temel ödev çözümleri yapılabilir. Böylece hesaplamalarda büyük kolaylık sağlanır.

I. Temel Ödevin İndirgeme Formülleriyle Çözümü

Verilenler : $P_1(x_1, y_1)$, S , α_{12}

İstenenler : $P_2(x_2, y_2)$, α_{21}

İndirgeme formüllerinde ikinci noktanın koordinatları da gerektiği için öncelikle bu amaç için ikinci noktanın yaklaşık koordinatları hesaplanmalıdır.

$$y_2 \approx y_1 + S \sin \alpha_{12}$$

$$x_2 \approx x_1 + S \cos \alpha_{12}$$

İndirgenmiş açıklık açısı ve kenar değeri

$$\delta s = S - s = -\frac{S}{6R^2} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) \cos^2 t_{12}$$

$$\delta t_{12} = \alpha_{12} - t_{12} = \frac{\rho}{6R^2} \Delta x (2y_1 + y_2) + \frac{\rho}{6R^2} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) \sin t_{12} \cos t_{12}$$

yukarıdaki indirgeme formüllerinden,

$$t_{12} = \alpha_{12} - \delta t_{12} \quad t_{21} = t_{12} \pm \pi$$

$$s = S - \delta s$$

şeklinde elde edilir. İstenen ikinci noktanın kesin koordinatları düzlem I. Temel ödev çözümüne göre,

$$y_2 = y_1 + s \sin t_{12}$$

$$x_2 = x_1 + s \cos t_{12}$$

karşı açıklık açısı α_{21} de δt_{21} indirgemesi hesaplanarak

$$\alpha_{21} = t_{21} + \delta t_{21}$$

Olur. Bu yöntemle temel ödev çözümünde, indirgeme değerleri ikinci noktanın yaklaşık koordinatları kullanılarak hesaplandığı için doğruluğu artırmak amacıyla kesin koordinat değerleri kullanılarak indirgeme değerleri yeniden hesaplanmalı şayet anlamlı bir fark varsa bu yeni indirgeme değerleriyle hesaplama tekrarlanmalıdır. İndirgeme yönteminin kullanıldığı tüm jeodezik hesaplamalarda bu durum söz konusudur.

Örnek-7:

Verilenler;

$$x_1 = 4394996.195 \text{ m} \quad y_1 = 0.000 \text{ m}$$

$$\alpha_{12} = 141^\circ 48' 41.2706'' \quad S = 69912.6734 \text{ m} \quad (R = 6374249.664 \text{ m})$$

İstenenler : y_2, x_2, α_{21} **Çözüm:** İkinci noktanın yaklaşık koordinatları

$$y_2 \approx y_1 + S \sin \alpha_{12} = 43223.59 \text{ m}$$

$$x_2 \approx x_1 + S \cos \alpha_{12} = 4340046.189 \text{ m}$$

İndirgenmiş açıklık açısı ve kenar değeri yukarıdaki indirgeme formüllerinden,

$$\delta s = S - s = -\frac{S}{6R^2} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) \cos^2 t_{12}$$

$$\delta t_{12} = \alpha_{12} - t_{12} = \frac{\rho}{6R^2} \Delta x (2y_1 + y_2) + \frac{\rho}{6R^2} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) \sin t_{12} \cos t_{12}$$

$$\delta t_{12} = -2.7777'' \quad , \quad \delta t_{21} = +3.2508'' \quad \text{ve} \quad \delta s = -0.33099 \text{ m}$$

$$t_{12} = \alpha_{12} - \delta t_{12} = 141^\circ 48' 44.0482'' \quad t_{21} = t_{12} \pm \pi = 321^\circ 48' 44.0482''$$

$$s = S - \delta s = 69913.0044 \text{ m}$$

şeklinde elde edilir. İstenen ikinci noktanın kesin koordinatları düzlem I. Temel ödev çözümüne göre,

$$y_2 = y_1 + s \sin t_{12} = 43223.055 \text{ m}$$

$$x_2 = x_1 + s \cos t_{12} = 4340045.347 \text{ m}$$

karşı açıklık açısı α_{21} de

$$\alpha_{21} = t_{21} + \delta t_{21} = 321^\circ 48' 47.2990'' \quad \text{olarak hesaplanır.}$$

II. Temel Ödevin İndirgeme Formülleriyle ÇözümüVerilenler : $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ İstenenler : $S, \alpha_{12}, \alpha_{21}$ **Çözüm:** Önce projeksiyon düzlemindeki açıklık açısı ve uzunluk değerleri noktaların verilen koordinatlarından yararlanılarak hesaplanır.

$$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \text{ve} \quad \Delta x = x_2 - x_1$$

$$\tan t_{12} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad t_{21} = t_{12} \pm \pi$$

$$s = \frac{\Delta y}{\sin t_{12}} = \frac{\Delta x}{\cos t_{12}} = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta x^2}$$

indirgeme formüllerinden yararlanarak küresel değerler,

$$\delta s = S - s = -\frac{s}{6R^2} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) \cos^2 t_{12}$$

$$\delta t_{12} = \alpha_{12} - t_{12} = \frac{\rho}{6R^2} \Delta x (2y_1 + y_2) + \frac{\rho}{6R^2} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) \sin t_{12} \cos t_{12}$$

$$\alpha_{12} = t_{12} + \delta t_{12}$$

$$\alpha_{21} = t_{21} + \delta t_{21}$$

$$S = s + \delta s$$

şeklinde elde edilir. II. temel ödev çözümünde noktaların koordinatları verildiği için iterasyona gerek yoktur.

Örnek-8:

Verilenler:

Nokta	y	x
1	0.000	4394996.195
2	43223.055	4340045.347 (R= 6374249.664m)

İstenenler : S, α_{12} , α_{21}

Çözüm: Önce projeksiyon düzlemindeki açıklık açısı ve uzunluk değerleri noktaların verilen koordinatlarından yararlanılarak hesaplanır.

$$\Delta y = y_2 - y_1 = 43223.055 \qquad \Delta x = x_2 - x_1 = -54950.848$$

$$t_{12} = \arctan \frac{\Delta y}{\Delta x} = 141.8122356^\circ = 141^\circ 48' 44.0482''$$

$$t_{21} = t_{12} \pm \pi = 321.8122356^\circ = 321^\circ 48' 44.0482'' \text{ ve}$$

$$s = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta x^2} = 69913.0044\text{m}$$

İndirgeme formüllerinden yararlanarak küresel değerler,

$$\delta t_{12} = -2.7777'' \quad , \quad \delta t_{21} = +3.2508'' \quad \text{ve} \quad \delta s = -0.33099\text{m}$$

$$\alpha_{12} = t_{12} + \delta t_{12} = 141^\circ 48' 41.2705'' \quad \alpha_{21} = t_{21} + \delta t_{21} = 321^\circ 48' 47.2990''$$

$$S = s + \delta s = 69912.6734\text{m}$$

şeklinde elde edilir.

Soru:

Soldner koordinatları;

$$Y_1 = 27652.00\text{m} \quad Y_2 = -17400.00\text{m}$$

$$X_1 = 4327642.00\text{m} \quad X_2 = 4321000.00\text{m}$$

Olarak verilen iki nokta arasında II. temel ödev yaparak istenenleri bulunuz.

$$T_1 - t_1 = \frac{\rho}{6R^2} (x_2 - x_1)(2y_1 + y_2) + \frac{\rho}{6R^2} (y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2) \sin t_1 \cos t_1$$

$$S - s = -\frac{\rho}{6R^2} (y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2) \cos^2 t_1 \quad (R=6370\text{km})$$

Cevap:

$$t_{12} = \arctan \frac{\Delta y}{\Delta x} = 261^\circ 6133187 = 261^\circ 36' 47.95''$$

$$s = 45538.98185\text{m}$$

$$t_{21} = 81^\circ 36' 47.95''$$

$$T_{12} - t_{12}$$

$$= \frac{\rho}{6R^2} (x_2 - x_1)(2y_1 + y_2) + \frac{\rho}{6R^2} (y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2) \sin t_1 \cos t_1$$

$$S - s = -\frac{\rho}{6R^2} (y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2) \cos^2 t_1$$

$$S - s = -.002332\text{m}$$

$$S = 45538.97952\text{m}$$

$$d_{t1} = T_{12} - t_{12} = -0.14162653''$$

$$T_{12} = 261^\circ 6132794 = 261^\circ 36' 47.8056''$$

$$d_{t1} = T_{21} - t_{21} = 0.0314''$$

$$T_{21} = 81^\circ 36' 47.9787''$$

Küre Yüzeyinde İndirgeme Formülleriyle Kestirme Hesapları

Küre yüzeyinde kestirme hesapları için geliştirilmiş özel yöntemler olup bunlar literatürde mevcuttur [1],[4],[20]. Ancak burada kestirme hesapları hesap kolaylığı nedeniyle indirgemeler suretiyle düzlem esaslara göre yapılacaktır. Bu amaçla yapılan tüm ölçüler indirgeme formülleriyle düzlem değerlere dönüştürülür. Şayet ölçülen açılar verilmişse bunlar doğrultulara çevrilir[7].

$$\delta s = S - s = -\frac{S}{6R^2}(y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2)\cos^2 t_{12}$$

$$\delta t_{12} = \alpha_{12} - t_{12} = \frac{\rho}{6R^2}\Delta x(2y_1 + y_2) + \frac{\rho}{6R^2}(y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2)\sin t_{12} \cos t_{12}$$

Şeklinde verilen indirgeme formüllerinde,

$$\sin t_{12} = \frac{\Delta y}{s} \qquad \cos t_{12} = \frac{\Delta x}{s}$$

değerleri kullanılarak indirgeme formülleri aşağıdaki gibi daha sade bir biçime sokulabilir. P_1 ve P_2 noktaları arasında küresel uzunluk S , küre yüzeyinde ölçülen doğrultu r ise bu değerlerin düzlem karşılıkları s ve r' aşağıdaki gibi bulunur.

$$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \text{ve} \quad \Delta x = x_2 - x_1 \quad \text{olmak üzere}$$

$$s = S + \frac{\Delta x^2}{6R^2 S}(y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2)$$

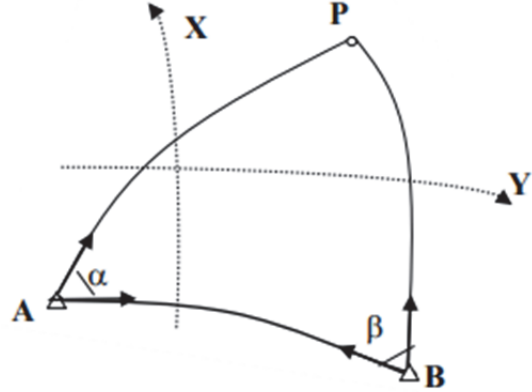
$$r' = r - \frac{\rho \Delta x}{6R^2} \left[(2y_1 + y_2) + (y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2) \frac{\Delta y}{\Delta y^2 + \Delta x^2} \right]$$

Ölçüler indirgeme eşitlikleriyle düzleme indirgendikten sonra tamamen düzlem trigonometri esaslarına göre bütün jeodezik hesaplamalar (temel ödev, kestirme, poligon hesapları gibi) düzlemdeymiş gibi yapılır ve Soldner sisteminde koordinatları bilinen noktalara dayalı olarak diğer noktaların kesin koordinatları hesaplanır. İndirgeme işlemlerinde yaklaşık koordinatlar kullanılmışsa düzlem hesap sonucunda bulunan kesin koordinatlarla indirgeme büyüklükleri yeniden hesaplanır. Eğer yeni hesaplanan indirgeme değerleri ile ilk hesaplanan indirgeme değerleri arasında anlamlı bir fark varsa bu yeni değerlerle hesaplama tekrarlanır yani iterasyon yapılır.

Kürede Önden Kestirme

Verilenler: $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$, α , β

İstenilenler: $P(x, y)$



Şekil-17

Çözüm:

Küre yüzeyinde ölçüldüğü varsayılan açılar (yatay doğrultular) düzleme indirgenir. Ölçülen açılar doğrultu farkları şeklinde düşünülürse aralarındaki ilişki,

$$\alpha = r_{ab} - r_{ap} \quad \beta = r_{bp} - r_{ba}$$

şeklinde olur.

Bu dört r_{ik} doğrultusu aşağıdaki şekilde indirgenir

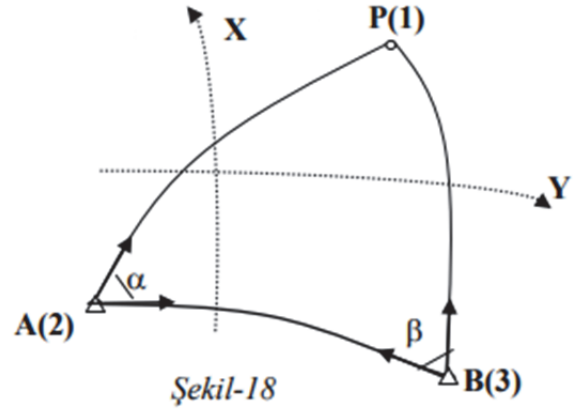
$$r' = r - \frac{\rho \Delta x}{6R^2} \left[(2y_1 + y_2) + (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) \frac{\Delta y}{\Delta y^2 + \Delta x^2} \right]$$

ve elde edilen r'_{ik} doğrultularıyla düzlemdeki α ve β açıları bulunur ve bu değerlerle düzlem önden kestirme hesabı yapılarak sonuca ulaşılır. Bu indirgeme işlemlerinde kestirilecek noktanın koordinatlarının yaklaşık da olsa bilinmesi gerekmektedir. Bu nedenle kestirilecek noktanın yaklaşık koordinatları problemin bütün verilenleriyle düzlemde kabul edilip çözülmesiyle elde edilir.

Örnek-1: Soldner sisteminde koordinatları verilen 2 ve 3 noktalarından kestirilecek 1 noktasına olan doğrultu ölçüleri verilmiştir. 1 noktasının Soldner koordinatlarını bulunuz (şekil-18).

Nokta	y	x
2(A)	43223.055	4340045.347
3(B)	43462.260	4450468.234

DN	BN	r_{ik} (Ölç.Doğrultu)
2	1	322.12787160°
2	3	0.44222481
3	2	180.44858670
3	1	218.40557320



İstenilenler: (1)P(x,y) koordinatları

P (1) noktasının yaklaşık koordinatlarını düzlem önden kestirme hesabıyla bulabilmek için öncelikle ölçülen doğrultu farklarından α ve β taban açıları hesaplanırsa aşağıdaki değerler elde edilir.

$$\alpha = 38.31435321^\circ \quad \text{ve} \quad \beta = 37.9569865^\circ$$

Taban açılarıyla önden kestirme eşitliklerinden kestirilecek noktanın yaklaşık koordinatları,

$$y_p = y_a + \frac{(y_b - y_a) \cot \alpha - (x_b - x_a)}{\cot \alpha + \cot \beta} = -3.838\text{m}$$

$$x_p = x_a + \frac{(x_b - x_a) \cot \alpha + (y_b - y_a)}{\cot \alpha + \cot \beta} = 4394996.197\text{m}$$

olarak bulunur.

Not: Bu eşitlikler şekil-17 ye göredir ve kestirilecek olan nokta AB doğrusunun solunda kalmaktadır. Yani kestirilecek noktadan bakıldığında sağdaki nokta A ve bu noktada ki taban açısı α , soldaki nokta B ve bu noktadaki taban açısı β dir. AB doğrusunun sağında kalan P noktası için yukarıdaki eşitliklerdeki α ve β açılarının eksi işaretli alınması gerekir.

Ölçülen doğrultular indirgenerek düzlem değerlere dönüştürüldüğünde

<i>DN</i>	<i>BN</i>	<i>r_{ik}</i> (Ölç.Doğrultu)	İndirgeme	<i>r'_{ik}</i> (İndirg.Doğr.)
2	1	322.12787160°	3.251''	322.12696856°
2	3	0.44222481	12.147	0.43885054
3	2	180.44858670	-12.149	180.45196143
3	1	218.40557320	-3.304	218.40649089

değerleri elde edilir. Bu indirgenmiş doğrultularla düzlem taban açıları

$$\alpha' = r'_{23} - r'_{21} \quad \beta' = r'_{31} - r'_{32}$$

$$\alpha' = 38.31188198^\circ \quad \text{ve} \quad \beta' = 37.95452946^\circ$$

olur ve bu açılarla yeniden düzlem önden kestirme yapılırsa,

P (1) noktasının kesin koordinatları

$$y_p = y_a + \frac{(y_b - y_a) \cot \alpha' - (x_b - x_a)}{\cot \alpha' + \cot \beta'} = -0.0003\text{m}$$

$$x_p = x_a + \frac{(x_b - x_a) \cot \alpha' + (y_b - y_a)}{\cot \alpha' + \cot \beta'} = 4394996.195\text{m}$$

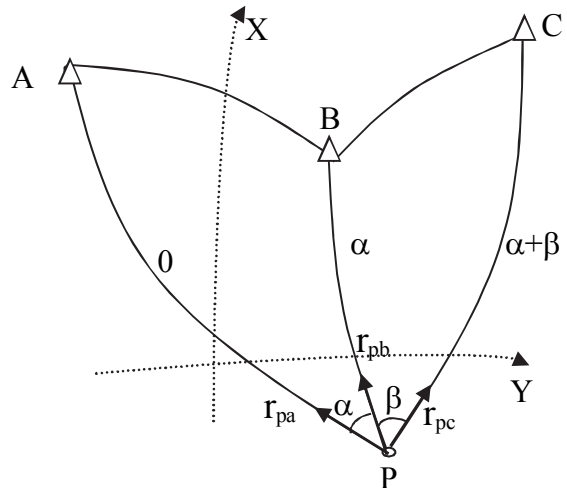
olarak bulunur. İndirgeme değerlerini kontrol amacıyla yukarıda bulunan koordinatlarla doğrultu indirgeme değerleri yeniden hesaplanmış ancak aynı değerler tekrar elde edildiğinden iterasyona gerek kalmamıştır.

Kürede Geriden Kestirme

Verilenler: A(y_A, x_A), B(y_B, x_B), C(y_C, x_C)

α, β açıları

İstenilenler: P(y_P, x_P)



Şekil-19

Çözüm: Küre üzerinde ölçüler (doğrultular) düzleme indirgenir. Ölçülen açılar doğrultu farkları şeklinde düşünülürse aralarındaki ilişki,

$$\alpha = r_{pb} - r_{pa} \quad \beta = r_{pc} - r_{pb}$$

şeklinde olur.

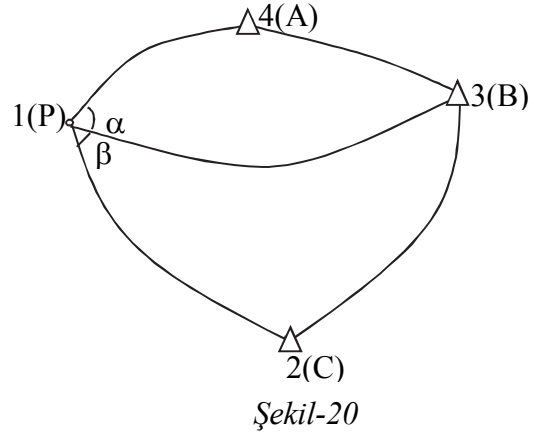
Bu üç r_{ik} doğrultusu aşağıdaki şekilde indirgenir

$$r' = r - \frac{\rho \Delta x}{6R^2} \left[(2y_1 + y_2) + (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) \frac{\Delta y}{\Delta y^2 + \Delta x^2} \right]$$

ve elde edilen r'_{ik} doğrultularıyla düzlemdeki α ve β açıları bulunur ve düzlem geriden kestirme hesabı yapılarak sonuca ulaşılır. Bu indirgeme işlemlerinde kestirilecek noktanın koordinatlarının yaklaşık da olsa bilinmesi gerekmektedir.

Örnek-2: Kestirilecek 1 noktasından Soldner sisteminde koordinatları verilen 2, 3 ve 4 noktalarına olan doğrultu ölçüleri verilmiştir. 1 noktasının Soldner koordinatlarını bulunuz (şekil-20).

Nokta	y	x
2(C)	43223.055	4340045.347
3(B)	43462.260	4450468.234
4(A)	16916.746	4506823.277



DN	BN	r_{ik} (Ölç. Doğrultu)
1	4	8.60270358°
	3	38.07942931
	2	141.81146400

İstenilenler: 1(P) noktasının (x,y) değerleri

Çözüm: Öncelikle ölçülen doğrultu farklarından α ve β taban açıları hesaplanırsa aşağıdaki değerler elde edilir.

$$\alpha = 29.47672573^\circ \quad \text{ve} \quad \beta = 103.7320347^\circ$$

Kestirilecek 1 noktasının yaklaşık koordinatları Delambre yönteminden

$$\tan t_b = \frac{(Ya - Yb) \cot \alpha + (Yc - Yb) \cot \beta - (Xc - Xa)}{(Xa - Xb) \cot \alpha + (Xc - Xb) \cot \beta + (Yc - Ya)} \Rightarrow t_b = 38.07961012^\circ$$

Buradan kestirilecek 1 noktasının yaklaşık koordinatları;

$$X_1 = \frac{Yc - Ya + Xa \tan(t_b - \alpha) - Xc \tan(t_b + \beta)}{\tan(t_b - \alpha) - \tan(t_b + \beta)} = 4394996.57m$$

$$Y_1 = Ya + (X_1 - Xa) \tan(t_b - \alpha) = -1.212m$$

olarak bulunur.

Ölçülen doğrultular indirgeme formülleriyle düzlem değerlere dönüştürüldüğünde

<i>DN</i>	<i>BN</i>	<i>r_{ik}</i> (Ölç. Doğrultu)	<i>İndirgeme</i>	<i>r'_{ik}</i> (İndirg. Doğr.)
1	4	8.60270358°	1.636''	8.60224909°
1	3	38.07942931	2.816	38.07864719
1	2	141.81146400	-2.778	141.81223555

doğrultu değerleri elde edilir.

Bu indirgenmiş doğrultularla düzlem taban açıları

$$\alpha' = r'_{13} - r'_{14} \quad \beta' = r'_{12} - r'_{13}$$

$$\alpha' = 29.4763981^\circ \quad \text{ve} \quad \beta' = 103.7335884^\circ$$

olur ve bu açılarla yeniden düzlem geriden kestirme yapılırsa,

$$\tan t_b = \frac{(Ya - Yb) \cot \alpha' + (Yc - Yb) \cot \beta' - (Xc - Xa)}{(Xa - Xb) \cot \alpha' + (Xc - Xb) \cot \beta' + (Yc - Ya)} \Rightarrow t_b = 38.07864746^\circ$$

Buradan kestirilecek 1 noktasının kesin koordinatları;

$$X_1 = \frac{Yc - Ya + Xa \tan(t_b - \alpha') - Xc \tan(t_b + \beta')}{\tan(t_b - \alpha') - \tan(t_b + \beta')} = 4394996.196m$$

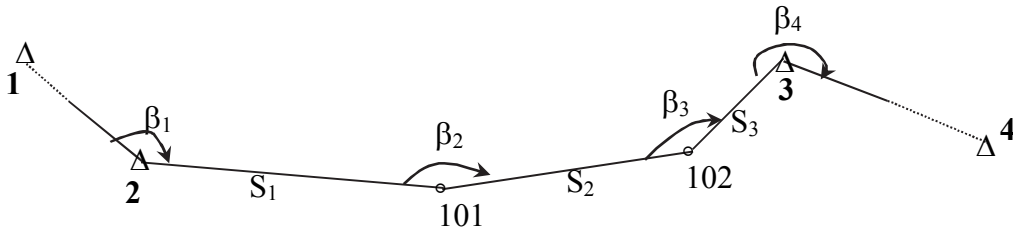
$$Y_1 = Ya + (X_1 - Xa) \tan(t_b - \alpha') = -0.0005m$$

olarak bulunur. İndirgeme değerlerini kontrol amacıyla yukarıda bulunan koordinatlarla doğrultu indirgeme değerleri yeniden hesaplanmış ancak aynı değerler tekrar elde edildiğinden iterasyona gerek kalmamıştır.

4.5. Küre Yüzeyinde Poligon Hesabı

Çok uzun kenarlı poligonların hesabının düzlemde yapılması doğru olmaz poligon hesabının küre yüzeyinde yapılması gerekir. İndirgeme formülleriyle küre üzerinde poligon hesabı yapmak mümkündür. Bunun için ölçülen poligon açıları (doğrultular) ve kenarlar (deniz seviyesindeki) indirgeme eşitlikleri yardımıyla düzlem değerlere dönüştürülür. Ölçülerin indirgenmesi aşamasında poligon noktalarının yaklaşık da olsa koordinatlarının bilinmesi gerekir. Bunun için düzlem esaslara göre yapılacak bir poligon hesabı ile poligon noktalarının yaklaşık koordinatları bulunur. İndirgeme işlemleri tamamlandıktan sonra indirgenmiş ölçülerle yapılacak ikinci bir poligon hesabı ile poligon noktalarının Soldner koordinatları bulunur[7].

Örnek-3: Küre yüzeyinde uzun kenarlı poligon hesabı



Şekil-21 Uzun Kenarlı Poligon Geçkisi

Şekil-21 deki uzun kenarlı poligon geçkisinde 1,2,3 ve 4 nolu nirengi noktalarının Soldner sisteminde koordinatları, şekilde gösterilen kırık açıları ve deniz seviyesine indirgenmiş yatay kenar uzunlukları verilmiştir. Poligon hesabını yaparak 101 ve 102 nolu poligon noktalarının Soldner sisteminde koordinatlarını bulunuz.

Nokta	y	x
1	148797.8870	202114.4370
2	172019.3820	233127.7370
3	180428.5440	265006.6990
4	201374.8450	296889.5260

Poligon açı ve kenar ölçüleri

$$\beta_1=183.30540^g \quad S_1= 11\ 851.879\text{ m}$$

$$\beta_2=183.56710^g \quad S_2= 9\ 859.157\text{ m}$$

$$\beta_3=208.01259^g \quad S_3= 11\ 426.546\text{m}$$

$$\beta_4=221.23667^g \quad (R=6373882.243\text{m})$$

Çözüm:

NNo	Kırılma Açıları β	Açıklık Açıları t	Kenar S	$\Delta y=s.\text{sint}$	$\Delta x=s.\text{cost}$	Y	X
1	-83	40.91597					
2	183.3054			2.139	3.85	172019.382	233127.737
	-83	24.21307	11851.879	4399.825	11004.934		
101	183.5671			1.779	3.202	176421.346	244136.521
	-83	7.77187	9859.157	1200.621	9785.780		
102	208.01259					177623.746	253925.503
	-83	15.77616	11426.546	2.062	3.712		
3	221.23667			2802.735	11077.483		
		37.00446				180428.544	265006.699
4	837.03773					8409.162	31878.962
	<u>37.00446</u>			[Δy]=	[Δx]=		
	$f_\beta = -332^{cc}$		[s]=	8403.181	31868.197	8403.181	31868.197
			33138m			$f_y = 5.981\text{m}$	$f_x = 10.765\text{m}$

Poligonların Yaklaşık Koordinatlarının Hesabı

$$\Delta y = y_2 - y_1 \quad \text{ve} \quad \Delta x = x_2 - x_1 \quad \text{olmak üzere}$$

$$s = S + \frac{\Delta x^2}{6R^2 S} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)$$

$$r' = r - \frac{\rho \Delta x}{6R^2} \left[(2y_1 + y_2) + (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) \frac{\Delta y}{\Delta y^2 + \Delta x^2} \right]$$

Öncelikle indirgeme işlemlerinin yapılabilmesi için yeni poligon noktalarının yaklaşık koordinatlarına ihtiyaç vardır. Bu amaçla düzlem poligon hesabıyla noktaların yaklaşık koordinatları hesaplanır. Ölçülen poligon açıları doğrultulara

çevrilir. Poligon hesabıyla bulunan noktaların yaklaşık koordinatları kullanılarak tüm doğrultularla ölçülen yatay kenarların aşağıdaki indirgeme eşitliklerine göre indirgemeleri yapılarak düzlem değerler hesaplanır.

Doğrultuların (açıların) İndirgenmesi

DN	BN	Ölç.Doğ r(g)	dr=r'-r (cc)	İndg.Doğ r'(g)	İndg.Açı β'(g)
2	1	0.000000	-56.98	-0.005698	
2	101	183.305400	-96.95	183.295706	183.301405
101	2	0.000000	-66.90	-0.006690	
101	102	183.567100	-43.27	183.562772	183.569461
102	101	0.000000	-16.12	-0.001612	
102	3	208.012590	-75.24	208.005069	208.006682
3	102	0.000000	-44.15	-0.004415	
3	4	221.236670	-177.98	221.218869	221.223286

Kenarların İndirgenmesi

DN	BN	Ölç.Kenar s(m)	ds=s-S (cm)	İndg. kenar s(m)
2	101	11851.8790	381.87	11855.6977
101	102	9859.1570	374.72	9862.9042
102	3	11426.5460	423.75	11430.7835

İndirgenmiş açı ve kenar uzunluklarıyla yapılacak yeni bir düzlem poligon hesabıyla poligon noktalarının kesin Soldner koordinatları bulunur.

NNo	Kırılma Açıları β'	Açıklık Açıları t	Kenar s	$\Delta y = s \cdot \sin t$	$\Delta x = s \cdot \cos t$	Y	X
1	-31	40.91597					
2	183.301405			0.039	-0.002	172019.382	233127.737
	-31	24.214275	11855.698	4401.450	11008.397		
101	183.569461			0.033	-0.001	176420.871	244136.132
	-31	7.780636	9862.904	1202.425	9789.334		
102	208.006682					177623.329	253925.465
	-30	15.784218	11430.783	0.038	-0.002		
3	221.223286			2805.177	11081.236		
		37.00446				180428.544	265006.699
4	837.016804					8409.162	31878.962
	<u>37.00446</u>			$[\Delta y] =$	$[\Delta x] =$	8409.052	31878.967
	$f_{\beta} = -123^{cc}$		$[s] =$			$f_y = 0.110m$	$f_x = -0.005m$
			33149				

Kesin Poligon Hesabı

Hesap Bölgesinin Sınırlılığı

Soldner koordinat sisteminde başlangıçta verilen kapalı formüllerle temel ödev eşitlikleri geneldir. Yani her kenar uzunluğu ve her ordinat değeri için geçerlidir. Oysa serilerle ve indirgemeli hesaplamalar bir miktar yaklaşıklık içerir. Dolayısıyla serilerle ve indirgemeli hesaplamalar formülleri sınırlı büyüklükteki bölgeler için kullanılabilir. Bu sınırlar $Y_{max} < 200km$ ve $S_{max} < 50km$.dir

Yapılan araştırmalar; ordinat ve kenar uzunluğu toplamının $S + Y_1 < 250km$ olması halinde $\pm 1cm$ konum doğruluğunun sağlanacağını göstermektedir.

Aşağıdaki tablo bu konuda fikir verecektir.

Hata	Serili ve İndirgemeli formüllerde aşılması gereken Y_1 ve S için sınır değerler (km)								
<1cm	$Y_1: 140$	150	160	180	200	230	250	290	350
	$S : 90$	80	70	60	50	40	30	20	10

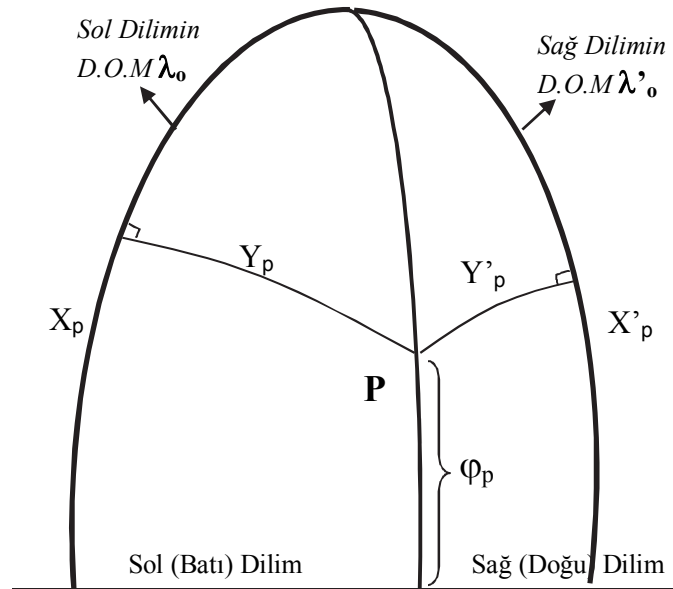
Tablo incelendiğinde; başlangıç meridyeninden çok uzaklaşılması veya çok uzun kenarların kullanılması halinde indirgemeli eşitlikler tam doğru sonuçlar vermez. 3 derecelik dilimlerin kullanıldığı düşünülürse Y - ordinat değerinin alacağı en büyük değer $\pm 167 km$ olacaktır. Yukarıdaki tabloya baktığımızda $\pm 1cm$ konum doğruluğu için 65km uzunlukta kenarlara izin verildiğini görüyoruz. Dolayısıyla indirgemeli

formüller dilimlerin en uçlarında bile 65km uzunlukta kenarların kullanılmasına izin vermektedir. Öte yandan pratik jeodezik çalışmalarda bu uzunlukta bir kenarın ölçülmesinin söz konusu olamayacağını da biliyoruz. Sonuç olarak burada verdiğimiz indirgemeli formüllerin rahatlıkla tüm jeodezik çalışmalarda kullanılabileceği ortaya çıkmaktadır. Diğer bir deyişle bu sınır değerler jeodezi uygulamaları için genelde her zaman yeterli olur. Zira Soldner sisteminde başlangıç meridyeni çalışma bölgesinin ortalarında seçilir. Buna rağmen bu sınır değerler aşıyorsa ikinci bir meridyen sistemi seçilir ve gerekiyorsa dilimler (meridyen sistemleri) arası koordinat dönüşümü yapılır.

Farklı dilimler arasında koordinat dönüşümü yapmak için önce bir sistemdeki Soldner koordinatlarından küresel coğrafi koordinatlar hesaplanır sonra da hesaplanan bu coğrafi koordinatlardan ikinci sistemdeki Soldner koordinatlarına geçiş yapılır.

4.6. Soldner Sisteminde Komşu Dilimler Arasında Koordinat Dönüşümü

Soldner sisteminde serilerle ve indirgemeli formüllerin kullanılması durumunda dilim genişliklerinin sınırlı tutulması gerektiğini biliyoruz. Ayrıca küre yüzeyinin düzleme projeksiyon söz konusu olduğunda dilim orta meridyeninden (D.O.M) uzaklaşmalar deformasyonları aşırı büyütür. Bu nedenle dilim genişliklerinin sınırlı tutulur. Hesap bölgesi birden fazla dilimi kapsıyorsa komşu dilimler arasında koordinat dönüşümü gerekebilir[4].



Şekil-22

Örneğin şekil-22 de bir P noktasının λ_o sisteminde Y_p, X_p Soldner koordinatları verilmekte ve aynı noktanın komşu λ'_o sisteminde Y'_p, X'_p Soldner koordinatları istenmektedir. Çözüm için verilen Soldner koordinatlarından önce noktanın coğrafi koordinatları sonra da coğrafi koordinatlardan ikinci sistemdeki Soldner koordinatları hesaplanmaktadır.

$$(X_p, Y_p)_{\lambda_o} \longrightarrow (\varphi_p, \lambda_p) \longrightarrow (X'_p, Y'_p)_{\lambda'_o}$$

Örnek-4: 33° meridyen sisteminde Soldner koordinatları;

$$Y = 164\,938.865\text{m}$$

$$X = 4\,891\,657.885\text{m}$$

olarak verilen noktanın 36° meridyen sistemindeki Soldner koordinatlarını bulunuz. (R=6373394m)

Çözüm:

Önce noktanın verilen Soldner koordinatlarından coğrafi koordinatları bulunur.

$$\lambda_o = 33^\circ \text{ için}$$

$$(\psi = X / R)$$

$$\lambda = \lambda_o + \arctan[\tan(Y/R) / \cos \psi] = 35.06000934^\circ = 35^\circ 3' 36.03''$$

$$\varphi = \arcsin[\cos(Y/R) * \sin \psi] = 43.9567036^\circ = 43^\circ 57' 24.13''$$

Bu coğrafi koordinatlardan $\lambda_o = 36^\circ$ için Soldner koordinatları hesaplanır.

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_o = -0.93999066^\circ$$

$$\psi = \arctan[\tan(\varphi) / \cos(\Delta\lambda)] = 43.96055658^\circ$$

Noktanın $\lambda_o = 36^\circ$ meridyen sistemindeki Soldner koordinatları

$$X = R(\psi/\rho) = 4\,890\,027.676\text{m}$$

$$Y = (R/\rho) \arcsin[\cos(\varphi) \sin(\Delta\lambda)] = -75\,268.465\text{m}$$

şeklinde bulunur.

5. HARİTA PROJeksiYONLARI

Harita Projeksiyonunun Tanımı: Yeryuvarının topoğrafik yüzeyindeki doğal ve yapay her türlü özellik ve tesislerin bir haritaya aktarılabilmesi için yeryüzü bilgileri önce yeryuvarı için kabul edilmiş bulunan elipsoid veya küre gibi referans yüzeyine indirgenir. Daha sonra bu bilgiler bir harita düzlemine taşınır. Referans yüzeyi olarak alınacak küre veya elipsoid gibi eğri yüzeyler doğrudan doğruya düzleme açılmazlar. Bu nedenle referans yüzeyine indirgenmiş yeryüzü bilgileri matematiksel veya geometrik kurallar uygulanarak ya doğrudan doğruya ya da düzleme açılabilen silindir ve koni gibi ara yüzeylere aktarılırlar. Bu işleme “Harita Projeksiyonu” denir. Harita projeksiyonunda yararlanılan düzlem ya da düzleme dönüşebilen koni ve silindir gibi yardımcı yüzeylere “projeksiyon yüzeyi” adı verilir [4],[6],[18]. Doğaldır ki jeodezik çalışmalar için referans yüzeyinin düzlem alınması durumunda projeksiyon işlemine gerek duyulmaz.

Fiziksel yeryüzündeki harita yapımına konu olan bilgiler arasında uzunluk, alan ve şekil (açı) bakımından daima bir ilişki vardır. Bu bilgiler projeksiyon yüzeyine aktarıldığında aralarında bulunan ilişkilerin esas yüzeydeki gibi kalması beklenemez ve ilişkilerde bazı değişimler ve bozulmalar olur. Projeksiyonda ortaya çıkan kaçınılmaz değişme ve bozulmalara “deformasyon” denir. Projeksiyon yöntemlerinde deformasyonların hesaplanabilme olanağı vardır.

Küre ve elipsoid gibi yüzeylerin düzleme projeksiyonları söz konusu olduğunda orijinal yüzey üzerindeki şekil düzleme geçirilirken mutlaka şekil, uzunluk, açı ya da alan cinsinden değişikliğe uğrar. Yukarıda sayılan üç özelliğin bir arada korunduğu bir projeksiyon türü mevcut değildir.

5.1. Projeksiyonların Sınıflandırılması








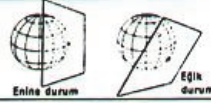




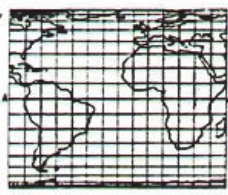
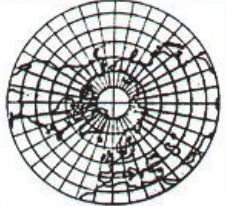

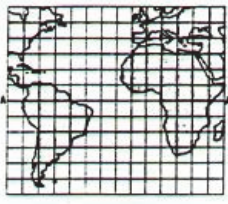
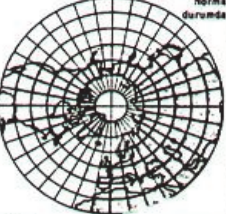
Değişik türleri bulunan ve farklı özellikler taşıyan harita projeksiyonları, kullanılan projeksiyon yüzeylerine ve projeksiyonun özelliklerine bağlı olarak iki ana gruba ayrılarak sınıflandırılır. Her grup içinde yer alan değişik projeksiyon türlerinden söz edilebilir. Harita projeksiyonları, projeksiyonun oluşumunda kullanılan yüzeylerin cinsine göre düzlem, silindirik ve konik projeksiyonlar olmak üzere üçe ayrılır. Bu projeksiyonlardan konik projeksiyonlar en genel durumdur. Zira koninin tepe açısı sıfır alındığında koni silindire, tepe açısı 180 derece alınması durumunda koni düzleme dönüşür.

Harita projeksiyonları, projeksiyonun özelliğine göre; açı koruyan (konform), alan koruyan, belirli doğrultularda uzunluk koruyan olarak üçe ayrılır. Bir projeksiyonun özellikleri denince, orijinal yüzeydeki diferansiyel anlamdaki bir küçük bir şeklin, projeksiyon yüzeyindeki karşılığının projeksiyon esnasında uğradığı değişiklikleri veren bilgiler anlaşılmaktadır.

Projeksiyon yüzeylerinin referans yüzeyiyle ortak noktalarına göre de teğet yüzeyli, kesen yüzeyli ve çok yüzeyli olmak üzere sınıflandırma yapılabilir.

Aşağıda çeşitli projeksiyonların sınıflandırılması çizelge üzerinde gösterilmektedir.

PROJEKSİYON SİSTEMLERİ

	KONİK PROJeksiYONLAR	SİLİNDİRSEL PROJeksiYONLAR	DÜZLEM (AZİMUTAL) PROJeksiYONLAR
Projeksiyon yüzeyleri	Projeksiyon yüzeyi, yerküreye değen bir konidir. 	Projeksiyon yüzeyi, yerküreye değen bir silindiridir. 	Projeksiyon yüzeyi, yerküreye bir noktada değen bir düzlemdir. 
Durum	Normal durum 	Normal durum  Eğik durum 	Normal durum  Eğik durum 
Mitteliklerine göre Projeksiyon Sistemleri	Eşit açılı Projeksiyonlar Açıları eşitlenir.  Lambert-Gauss Projeksiyonu	 Mercator Projeksiyonu	 Stereografik Projeksiyon
	Eşit alanlı Projeksiyonlar Alanları eşitlenir.  Eşit alanlı Konik Projeksiyon	 Lambert Silindirel Projeksiyonu	 Lambert Düzlem Projeksiyonu
	Eşit uzaklıklı Projeksiyonlar Benzer alanlar eşitlenir.  Eşit uzaklıklı Konik Projeksiyon	 Kare Projeksiyon	 Eşit uzaklıklı Projeksiyon

Şekil-1 Çeşitli Projeksiyon Türleri

Harita projeksiyon yöntemleri geliştirilirken orijinal yüzey üzerindeki uzunluk, alan ve şekil (açı) ilişkilerinden bir tanesinin korunması istenir.

Bu durumda karşımıza üç değişik harita projeksiyonu çıkar.

1) Uzunluk Koruyan Projeksiyonlar

Uzunluk koruyan projeksiyon kavramından projeksiyonun her yönde uzunluk koruduğu anlaşılmalıdır. Zira projeksiyon her yönde uzunluk korusaydı projeksiyon aynı zamanda açı koruyan projeksiyon olacaktır. Uzunluk koruyan projeksiyon kavramından yalnızca bir doğrultuda uzunluğun korunduğunu anlamalıyız. Uzunluk koruyan projeksiyonlara örnek olarak silindirik transversal bir projeksiyon olan Ordinat Koruyan Projeksiyon (Cassini-Soldner Projeksiyonu) verilebilir. Bu projeksiyonda Y eksenini boyunca uzunluk korunur (Bölüm 17.12).

2) Açı Koruyan (Konform) Projeksiyonlar

Bu projeksiyon türünde, uzunluk deformasyonu doğrultuya bağlı olmaksızın her yönde eşit olduğundan şekillerde bozulma olmaz, açılar korunur. Gauss-Kruger Projeksiyonu ile Lambert (Konik) Projeksiyonu açı koruyan projeksiyonlardır.

3) Alan Koruyan Projeksiyonlar

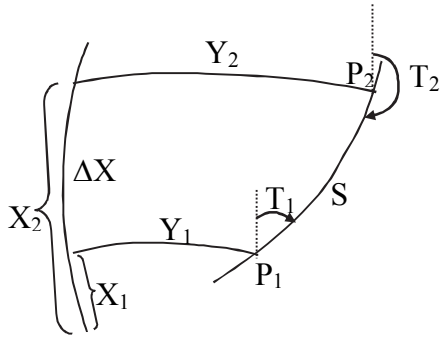
Alan koruyan projeksiyonda orijinal yüzeydeki alan ile projeksiyon yüzeyindeki alan arasında bir fark yoktur. Bu tür projeksiyona örnek olarak Bonne Projeksiyonu verilebilir.

BÖHYH yatay kontrol (nirenge) noktalarının koordinatlarının üç derecelik Gauss-Krüger Projeksiyon yüzeyinde hesaplanması gerektiğini belirtmektedir (madde-7). Bu nedenle harita projeksiyonlarından yalnızca Gauss-Krüger Projeksiyonu hakkında özet bilgi verilecektir.

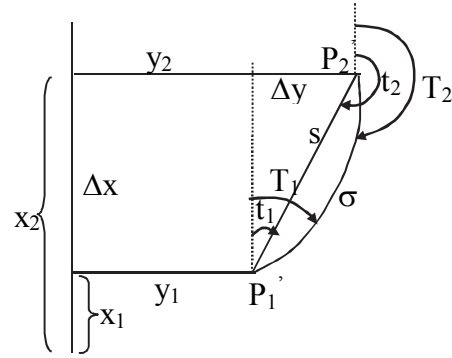
5.2. Kürenin Düzleme Ordinat Koruyan (Cassini-Soldner Projeksiyonu) Projeksiyonu

Herhangi bir projeksiyon kuralı koymaksızın küresel meridyen dik koordinatları (Soldner dik koordinatları) düzlem koordinatları gibi işleme tabi tutulursa, kürenin düzleme ordinat koruyan projeksiyonu elde edilir. Bu projeksiyonda düzlem ve küresel dik koordinatları arasındaki ilişki;

$$x = X \quad y = Y \quad \text{şeklindedir.}$$



Küre Yüzeyi



Projeksiyon Yüzeyi

Ancak, bu şekilde projeksiyon düzlemi koordinatları ile hesaplanan uzunluk ve doğrultular, karşılıkları olan uzunluk ve doğrultulardan farklı olur. Başlangıç meridyenine yakın bölgelerde bu farklar dikkate alınmayacak kadar küçük olmakla beraber başlangıç meridyeninde uzaklaştıkça bu farkların dikkate alınması gereği ortaya çıkar.

Ordinat Koruyan Projeksiyonda Uzunluk İndirgemesi:

Uzunluk indirgemesi P_1P_2 büyük daire yayının S uzunluğu ile $P_1'P_2'$ doğrusunun s uzunluğu arasındaki farktır. Uzunluk indirgemesi $\delta s = S - s$ şeklinde ifade edilmiştir.

$$\delta s = S - s = -\frac{S}{6R^2} (y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2) \cos^2 t_1$$

Yukarıdaki formüldeki t_1 yerine T_1 ve s yerine S kullanılması, sonucu büyük ölçüde değiştirmez. $T = \pi/2$ için $\delta s = 0$ olur. Bu da projeksiyonun ordinat koruduğunun bir göstergesidir. $T = 0$ için de $\delta s = \max$ olur. Bu durumda da $y_1 = y_2$ olur. Ordinat koruyan projeksiyon konform (açı koruyan) bir projeksiyon değildir.

Ordinat Koruyan Projeksiyonda Doğrultu İndirgemesi:

$$T_2 - t_2 = \frac{\rho''}{6R^2} (x_1 - x_2)(y_1 + 2y_2) + \frac{\rho''}{6R^2} (y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2) \sin t_2 \cos t_2$$

$$T_1 - t_1 = \frac{\rho''}{6R^2} (x_2 - x_1)(2y_1 + y_2) + \frac{\rho''}{6R^2} (y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2) \sin t_1 \cos t_1$$

Bu formüllerde T ve t farklarının çok küçük olduğu gerekçesi ile t yerine T de kullanılabilir.

Ordinat Koruyan Projeksiyonda Alan İndirgemesi:

Küre üzerinde apsis ve ordinat daireleri ile sınırlandırılmış bir şekil projeksiyon düzlemine bir dikdörtgen olarak geçer. Küre yüzeyindeki F alanı ile projeksiyon yüzeyindeki f alanı arasındaki fark aşağıdaki gibidir.

$$F - f = -\frac{f}{6R^2}(y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2)$$

Ortalama bir

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

değeri için alan farkı

$$F - f = -\frac{y_m^2}{2R^2} f \text{ olur.}$$

Ordinat Koruyan Projeksiyonda Jeodezik Temel Ödevlerin Çözümü:

1. Jeodezik Temel Ödev

Verilenler: $P_1(X_1, Y_1)$, T_1 , S

İstenenler: $P_2(X_2, Y_2)$, T_2

İşlem Adımları:

1) Projeksiyon koordinatları hesaplanır.

$$x_1 = X_1 \quad y_1 = Y_1$$

2) İndirgeme formüllerinde kullanılmak üzere x_2, y_2 için yaklaşık değer hesaplanır.

$$x_2 \approx x_1 + S \cos T_1 \quad y_2 \approx y_1 + S \sin T_1$$

3) s ve t_1 için indirgemeler ve düzlem değerler hesaplanır.

$$s = S + \frac{S}{6R^2}(y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2)\cos^2 t_1$$

$$t_1 = T_1 - \frac{\rho''}{6R^2}(x_2 - x_1)(2y_1 + y_2) - \frac{\rho''}{6R^2}(y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2)\sin t_1 \cos t_1$$

4) Problem düzlemde çözülür.

$$x_2 = x_1 + s \cos t_1 \quad y_2 = y_1 + s \sin t_1 \quad t_2 = t_1 \pm \pi$$

5) T_2 için t_2 değerinden faydalanarak indirgeme formülü ile değeri hesaplanır.

$$T_2 = t_2 + \frac{\rho''}{6R^2} (x_1 - x_2)(y_1 + 2y_2) + \frac{\rho''}{6R^2} (y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2) \sin t_2 \cos t_2$$

6) Projeksiyon kuralına göre küresel değerlere geçilir.

$$X_2 = x_2 \quad Y_2 = y_2$$

4. işlem adımında bulunan kesin koordinatlar (x_2, y_2) kullanılarak 3. adımdaki düzeltme değerleri yeniden hesaplanır ve değişiklik olup olmadığına bakılır. Eğer değişiklik miktarı önemli ise 4. Adımdaki koordinat hesabı yeniden yapılmalıdır.

Örnek:

Verilenler: $P_1(X_1, Y_1)$, T_1 , S

$$X_1 = -92276.440 \text{ m} \quad S = 105455.230 \text{ m} \quad T_1 = 321^\circ 56' 06.09''$$

$$Y_1 = 82130.142 \text{ m} \quad R = 6373924.115 \text{ m}$$

İstenenler: $P_2(X_2, Y_2)$, T_2

$$x_1 = X_1 = -92276.440 \text{ m} \quad y_1 = Y_1 = 82130.142 \text{ m}$$

$$x_2 \approx x_1 + S \cos T_1 \approx -9250.265 \text{ m}$$

$$y_2 \approx y_1 + S \sin T_1 \approx 17111.224 \text{ m}$$

$$s = S + \frac{S}{6R^2} (y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2) \cos^2 t_1$$

$$t_1 = T_1 - \frac{\rho''}{6R^2} (x_2 - x_1)(2y_1 + y_2) - \frac{\rho''}{6R^2} (y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2) \sin t_1 \cos t_1$$

$$s = S + 2.264 \text{ m} = 105457.494 \text{ m}$$

$$t_1 = T_1 - 12.74'' + 3.47'' = 321^\circ 55' 56.82''$$

$$x_2 = x_1 + s \cos t_1 = -9251.404 \text{ m}$$

$$y_2 = y_1 + s \sin t_1 = 17106.096 \text{ m}$$

Kontrol için bulunan bu x_2 ve y_2 değerleri ile s ve t_1 değerleri yeniden hesaplanır.

$$t_1 = T_1 - 12.74'' + 3.47'' = 321^\circ 55' 56.82''$$

$$s = S + 2.264 \text{ m} = 105457.494 \text{ m}$$

Aynı indirgeme büyüklükleri elde edildiği için iterasyona gerek yoktur. Karşıt semt;

$$T_2 = t_2 + \frac{\rho''}{6R^2}(x_1 - x_2)(y_1 + 2y_2) + \frac{\rho''}{6R^2}(y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2)\sin t_2 \cos t_2$$

$$t_2 = t_1 - \pi = 141^\circ 55' 56.82''$$

$$T_2 = t_2 - 8.17'' - 3.47'' = 141^\circ 55' 45.18''$$

II. Jeodezik Temel Ödev

Verilenler: $P_1(X_1, Y_1)$, $P_2(X_2, Y_2)$

İstenenler: S , T_1 , T_2

Bu problemde I. Jeodezik temel problemde olduğu gibi iteratif işlem gerekmez.

İşlem Adımları:

1) Projeksiyon koordinatları hesaplanır.

$$x_1 = X_1 \quad y_1 = Y_1$$

$$x_2 = X_2 \quad y_2 = Y_2$$

2) Düzlemde 2. temel problem çözümü yapılır.

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad \Delta y = y_2 - y_1$$

$$t_1 = \arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \quad S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad t_2 = t_1 + \pi$$

3) İndirgemelerle küresel S, T₁ ve T₂ değerlerine geçilir.

$$S = s - \frac{s}{6R^2}(y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2)\cos^2 t_1$$

$$T_1 = t_1 + \frac{\rho''}{6R^2}\Delta x(2y_1 + y_2) + \frac{\rho''}{6R^2}(y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2)\sin t_1 \cos t_1$$

$$T_2 = t_2 + \frac{\rho''}{6R^2}\Delta x(y_1 + 2y_2) + \frac{\rho''}{6R^2}(y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2)\sin t_2 \cos t_2$$

Örnek:

Verilenler: P₁(X₁, Y₁), P₂(X₂, Y₂)

$$X_1 = 18560.115 \text{ m} \quad X_2 = 46587.077 \text{ m}$$

$$Y_1 = 17043.856 \text{ m} \quad Y_2 = 59433.954 \text{ m}$$

$$R = 6373924.115 \text{ m}$$

İstenenler: S, T₁, T₂

$$x_1 = X_1 = 18560.115 \text{ m} \quad x_2 = X_2 = 46587.077 \text{ m}$$

$$y_1 = Y_1 = 17043.856 \text{ m} \quad y_2 = Y_2 = 59433.954 \text{ m}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 28026.962 \text{ m}$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = 42390.098 \text{ m}$$

$$t_1 = \arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \quad S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad t_2 = t_1 + \pi$$

$$t_1 = 56^\circ 31' 43.00'' \quad t_2 = t_1 + \pi = 236^\circ 31' 43.00''$$

$$s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 50817.625 \text{ m}$$

$$S = s - \frac{s}{6R^2}(y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2)\cos^2 t_1$$

$$T_1 = t_1 + \frac{\rho''}{6R^2}\Delta x(2y_1 + y_2) + \frac{\rho''}{6R^2}(y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2)\sin t_1 \cos t_1$$

$$T_2 = t_2 + \frac{\rho''}{6R^2}\Delta x(y_1 + 2y_2) + \frac{\rho''}{6R^2}(y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2)\sin t_2 \cos t_2$$

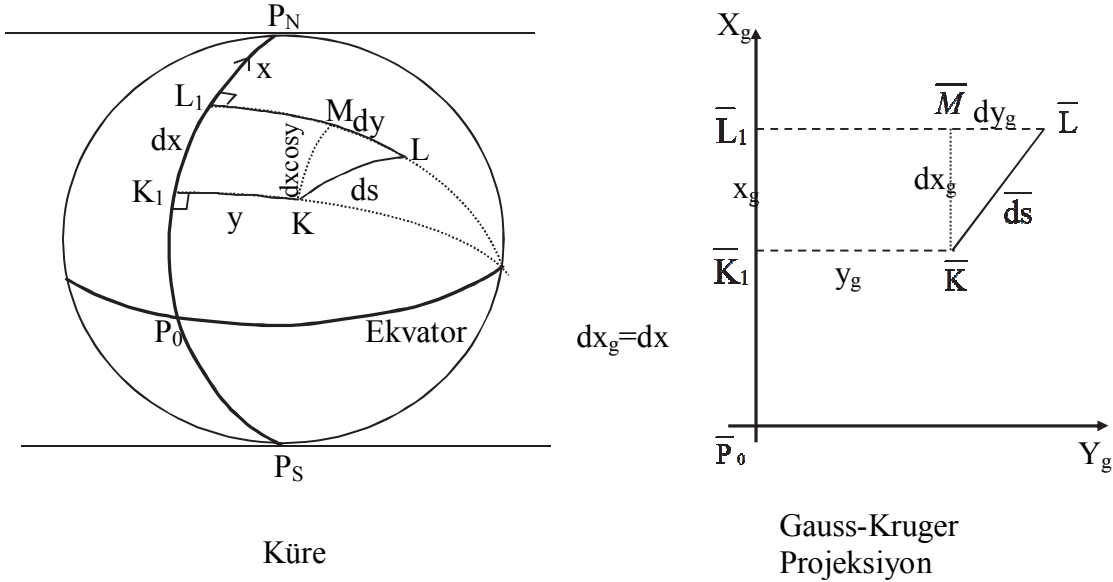
$$S = s - 0.307m = 50817.318 \text{ m}$$

$$T_1 = t_1 + 2.22'' + 1.88'' = 56^\circ 31' 47.10''$$

$$T_2 = t_2 - 3.22'' + 1.88'' = 236^\circ 31' 41.66''$$

Not: Projeksiyon düzlemindeki jeodezik hesaplamalar için daha pratik yol tüm ölçüler(doğrultu ve kenarlar) önce projeksiyon düzlemine indirgenir. Gerekli bütün jeodezik hesaplar(kestirme, poligon hesapları) düzlemde yapılır. Gerekiyorsa sonunda düzlemden küreye geçilir.

5.3. Kürenin Düzleme Gauss - Krüger (Konform) Projeksiyonu



1931 yılından beri ülkemizde de kullanılmakta olan Gauss-Krüger Projeksiyonu silindirik, transversal, açı koruyan(konform) bir projeksiyondur. İzdüşüm yüzeyi olan silindir, küreye başlangıç olarak seçilen meridyen boyunca teğettir. Bu meridyene “başlangıç meridyeni” denir. Ülkemiz genelindeki çalışmalar için belirlenmiş başlangıç meridyenleri vardır.

Bunlar $27^\circ, 30^\circ, 33^\circ, 36^\circ, 39^\circ, 42^\circ, 45^\circ$ meridyenleridir.

GKP de seçilen başlangıç meridyeninin Gauss-Krüger projeksiyonu düzlemindeki karşılığı X_g eksenini olarak alınır. Bu durumda başlangıç meridyeninde uzunluk deformasyonu yoktur.

Gauss-Krüger projeksiyonunda x_g değerleri ekvatorundan başlar. Bu yüzden jeodezik dik koordinat sisteminin başlangıç noktasının ekvator üzerinde olduğu düşünülmelidir.

P_0 başlangıç noktasının Gauss-Kruger projeksiyon düzlemindeki karşılığı olarak seçilen \bar{P}_0 noktasından X ekseninin karşılığı olacak herhangi bir x_g eksenini alınır.

Başlangıç meridyeninde uzunluk korunduğundan

$$P_0 K_1 = \bar{P}_0 \bar{K}_1 \quad P_0 L_1 = \bar{P}_0 \bar{L}_1$$

alınarak K_1, L_1 noktalarının \bar{K}_1, \bar{L}_1 karşılıkları bulunur. K, L noktalarının karşılıklarını bulmak için \bar{K}_1, \bar{L}_1 noktalarından çıkılan dikler üzerinde y_g ve $y_g + dy_g$ değerleri kadar alınır. Bu değerler projeksiyon formüllerinden hesaplanır.

GKP konform açı koruyan bir projeksiyondur. Şekildeki küre yüzeyindeki diferansiyel KLM üçgeni ile projeksiyon düzlemindeki karşılığı $\bar{K} \bar{L} \bar{M}$ üçgeninin benzer olmasıdır. Bu benzerliğin olabilmesi için,

$$\frac{\bar{ds}}{ds} = \frac{dy_g}{dy} = \frac{dx_g}{dx \cdot \cos Y}$$

olmalıdır.

X ler eşit olduğu için $dx_g = dx$ yazılabilir. Bu durumda;

$$\frac{dy_g}{dy} = \frac{1}{\cos Y} = m \quad (m : \text{ölçek, diferansiyel büyüme oranı})$$

Buradan

$$dx_g = dx$$

$$dy_g = dy / \cos Y$$

çıkar. Bu eşitliklerin her iki tarafının integrali alınırsa,

$$x_g = X$$

$$y_g = Y + \frac{Y^3}{6R^2} + \frac{Y^5}{24R^4} \quad \text{ya da} \quad y_g = R \arctan h \left(\sin \frac{Y}{R} \right)$$

böylelikle jeodezik dik (Soldner) koordinatlarıyla Gauss-Kruger koordinatları arasındaki ilişki çıkarılmış olur.

Jeodezik Dik (Soldner) Koordinatlardan Gauss-Kruger Koordinatlarının Bulunması

Verilenler: X, Y

İstenenler: x_g, y_g

$$x_g = X$$

$$y_g = Y + \frac{Y^3}{6R^2} + \frac{Y^5}{24R^4} \quad \text{ya da} \quad y_g = R \arctan h \left(\sin \frac{Y}{R} \right)$$

Örnek: Başlangıç noktası ekvatorдан olan bir jeodezik dik koordinat sisteminde koordinatları $X = 4183627\text{m}$ ve $Y = 153728\text{m}$ olan noktanın Gauss-Kruger projeksiyon koordinatlarını bulunuz. ($R = 6373394\text{m}$)

$$x_g = X = 4183627\text{m}$$

$$y_g = 153728 + 0.014906 + 0.000002 = 153742.908 \text{ m}$$

Gauss- Kruger Koordinatlarından Jeodezik Dik (Soldner) Koordinatlarının Bulunması

Verilenler: x_g, y_g

İstenenler: X, Y

$$X = x_g$$

$$Y = y_g - \frac{y_g^3}{6R^2} + \frac{y_g^5}{24R^4} \quad \text{ya da}$$

$$Y = R \arcsin \left(\tanh \frac{y_g}{R} \right)$$

Örnek: Gauss-Kruger koordinatları $x_g = 4183627 \text{ m}$ ve $y_g = 153742.908 \text{ m}$ olan noktanın jeodezik dik koordinatlarını hesaplayınız.

$$X = x_g = 4183627 \text{ m}$$

$$Y = y_g - \frac{y_g^3}{6R^2} + \frac{y_g^5}{24R^4}$$

$$Y = 153742.908\text{m} - 14.9105\text{m} + 0.0022\text{m}$$

$$Y = 153727.9997 \text{ m} = 153728 \text{ m}$$

Gauss- Krüger Koordinatlardan Küresel Coğrafi Koordinatların Hesabı

Küresel coğrafi koordinatlar küresel meridyen dik koordinatları cinsinden,

$$\varphi = \arcsin\left(\sin\frac{X}{R} \cos\frac{Y}{R}\right)$$

$$\lambda = \arctan\left(\frac{\tan\frac{Y}{R}}{\cos\frac{X}{R}}\right)$$

Gauss- Krüger koordinatları cinsinden,

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{\sin\frac{x}{R}}{\cosh\frac{y}{R}}\right)$$

$$\lambda = \arctan\left(\frac{\sinh\frac{y}{R}}{\cos\frac{x}{R}}\right)$$

Örnek 1:

Verilenler: Küresel coğrafi koordinatları

$$\varphi = 38^{\circ} 12' 24.16'' \quad \lambda = 31^{\circ} 10' 29.22'' \text{ olarak veriliyor.}$$

İstenenler: $\lambda_0 = 30^{\circ}$ sistemindeki (x, y) Gauss- Krüger koordinatları

$$R = 6373924.115 \text{ m}$$

$$\lambda = \Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = 1^{\circ} 10' 29.22''$$

$$x = R \arctan\left(\frac{\tan\varphi}{\cos\lambda}\right) = 4250993.561 \text{ m}$$

$$y = R \operatorname{arctanh}(\sin\lambda \cos\varphi) = 102695.782 \text{ m}$$

Örnek 2:

Verilenler: Bir noktanın $\lambda_0 = 30^{\circ}$ sisteminde Gauss- Krüger koordinatları

$$x = 4250993.561 \text{ m} \quad y = 102695.782 \text{ m} \text{ olarak veriliyor}$$

$$R = 6373924.115 \text{ m}$$

İstenenler: (φ, λ) küresel coğrafi koordinatlar

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{\sin \frac{x}{R}}{\cosh \frac{y}{R}}\right) = 38^\circ 12' 24.16''$$

$$\lambda = \arctan\left(\frac{\sinh \frac{y}{R}}{\cos \frac{x}{R}}\right) = 1^\circ 10' 29.22''$$

Gauss-Kruger Projeksiyonunda Uzunluk Deformasyonu

Gauss-Kruger projeksiyonunda her yönde uzunluk deformasyonu eşit olduğundan (açı koruyan) olma özelliği nedeniyle ölçek;

$$m = 1 + \frac{Y^2}{2R^2} + \frac{5Y^4}{24R^4} \quad \text{olur.}$$

$$m = 1 + \frac{y_g^2}{2R^2} + \frac{y_g^4}{24R^4}$$

Projeksiyon yüzündeki kenar her zaman yeryüzündeki (küre yüzeyindeki) karşılığından büyüktür.

$$\delta_s = S - s = -\frac{S}{6R^2}(y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2)$$

$$\delta_s = S - s = -S \frac{y_m^2}{2R^2}$$

Gauss- Kruger Projeksiyonunda (Açıklık Açısı) Doğrultu İndirgemesi

Yeryüzündeki açıklık açısıyla projeksiyon düzlemindeki karşılığı arasındaki farka açıklık açısı redüksiyonu denir ve

$$\delta_t = T - t$$

şeklinde gösterilir.

$$\delta_1 = T_1 - t_1 = \frac{\rho}{4R^2}(x_2 - x_1)(y_2 + y_1) - \frac{\rho}{12R^2}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$$

$$\delta_2 = T_2 - t_2 = \frac{\rho}{4R^2}(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) - \frac{\rho}{12R^2}(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)$$

Bu formüller daha kısa olacak şekilde aşağıdaki gibi tek terimde yazılabilir.

$$\delta_1 = T_1 - t_1 = \frac{\rho}{6R^2} \Delta x (2y_1 + y_2)$$

$$\delta_2 = T_2 - t_2 = -\frac{\rho}{6R^2} \Delta x (y_1 + 2y_2)$$

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

üzerinde hesap yapılan kenarlar kısa ise redüksiyon bağıntıları daha basit biçime dönüştürülebilir. y_1 ve y_2 yerine bunların ortalama değeri,

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} \text{ alınır}$$

$$T_1 - t_1 = \frac{\rho}{2R^2} y_m \Delta x$$

$$T_2 - t_2 = -\frac{\rho}{2R^2} y_m \Delta x$$

Gauss -Kruger Projeksiyonunda Alan Redüksiyonu

Küre yüzeyindeki F alanı ile projeksiyon yüzeyindeki f alanı arasındaki fark aşağıdaki gibidir.

$$F - f = -f \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{3R^2}$$

$$F - f = -f \frac{y_m^2}{R^2}$$

Gauss -Kruger Projeksiyonunda Jeodezik Temel Ödevlerin Çözümü

I. Jeodezik Temel Ödevin Çözümü

Verilenler: $P_1(X_1, Y_1)$, T_1 ve S

İstenenler: $P_2(X_2, Y_2)$, T_2

Ordinat koruyan projeksiyonda olduğu gibi Gauss-Kruger projeksiyonunda I. Jeodezik temel ödevlerin çözümü için bir iteratif işlem söz konusudur. İşlem adımları;

1) Projeksiyon koordinatları hesaplanır.

$$x_1 = X_1$$

$$y_1 = Y_1 + \frac{Y_1^3}{6R^2} + \frac{Y_1^5}{24R^4}$$

$$y_1 = R * \operatorname{arctanh}\left(\sin \frac{Y_1}{R}\right)$$

2) İndirgeme formülleri için x_2 , y_2 'nin yaklaşık değerleri hesaplanır.

$$x_2 \cong x_1 + S \cdot \cos T_1$$

$$y_2 \cong y_1 + S \cdot \sin T_1$$

3) s ve t_1 için indirgemeleri ve düzlem değerleri hesaplanır.

$$s = S + \frac{S}{6R^2} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)$$

$$t_1 = T_1 - \frac{\rho''}{6R^2} \Delta x (2y_1 + y_2)$$

4) Problem düzlemde çözülür

$$x_2 = x_1 + s \cdot \cos t_1$$

$$y_2 = y_1 + s \cdot \sin t_1$$

Bu adımdan sonra x_2 , y_2 değerleri ile 3. adıma dönülerek uzunluk ve doğrultu indirgemeleri formülleri ile s_1 ve t_1 değerleri yeniden hesaplanır. Eğer değişme yoksa 5. adıma geçilir.

5) T_2 için t_2 değerinden yararlanarak indirgeme formülleriyle değeri hesaplanır.

$$t_2 = t_1 + \pi$$

$$T_2 = t_2 - \frac{\rho''}{6R^2} \Delta x (y_1 + 2y_2)$$

6) Projeksiyon kurallarına göre küresel değerlere geçilir.

Örnek:

Verilenler:

$$X_1 = -92276.440 \text{ m} \quad Y_1 = 82130.142 \text{ m}$$

$$S = 105455.230 \text{ m} \quad T_1 = 321^{\circ} 56' 06.09''$$

İstenenler: X_2 , Y_2 ve T_2

$$x_1 = X_1 = -92276.440 \text{ m}$$

$$y_1 = R \cdot \operatorname{arctanh}\left(\sin \frac{Y_1}{R}\right) = 82132.415 \text{ m}$$

$$x_2 \cong x_1 + S \cos T_1 = -9250.265 \text{ m}$$

$$y_2 \cong y_1 + S \sin T_1 = 17113.497 \text{ m}$$

$$s = S + \frac{S}{6R^2} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)$$

$$s = S + 3.653 = 105458.883 \text{ m}$$

$$t_1 = T_1 - \frac{\rho''}{6R^2} \Delta x (2y_1 + y_2)$$

$$t_1 = T_1 - 12.74''$$

$$t_1 = 321^\circ 55' 53.35''$$

$$x_2 = x_1 + s \cos t_1 = -9251.405 \text{ m}$$

$$y_2 = y_1 + s \sin t_1 = 17106.116 \text{ m}$$

Bu adımdan sonra son bulunan x_2 , y_2 değerleri kullanılarak indirgeme eşitlikleri ile s ve t_1 değerleri yeniden hesaplanır.

$$s = S + 3.653 \text{ m} = 105458.883 \text{ m}$$

$$t_1 = T_1 - 12.74'' = 321^\circ 55' 53.35''$$

yani değerler değişmemiştir. O halde x_2 ve y_2 için yapılan düzlem hesap sonucu bulunan değerler kesin değerlerdir. Son olarak karşı noktadaki semt hesaplanır.

$$t_2 = t_1 + \pi = 141^\circ 55' 53.35''$$

$$T_2 = t_2 - \frac{\rho''}{6R^2} \Delta x (y_1 + 2y_2) = t_2 - 8.17''$$

$$T_2 = 141^\circ 55' 45.18''$$

istenirse projeksiyon kuralına göre küresel koordinatlar hesaplanır.

$$X_2 = x_2 = -9251.405 \text{ m}$$

$$Y_2 = R \arcsin(\tanh \frac{y_2}{R}) = 17106.096 \text{ m}$$

Gauss-Kruger Projeksiyonda II. Jeodezik Temel Ödevin Çözümü

Verilenler: $P_1 (X_1, Y_1)$, $P_2 (X_2, Y_2)$

İstenenler: S , T_1 ve T_2

Bu problemlerin çözümünde I. Jeodezik temel ödevinde olduğu gibi iteratif işleme gereksinim duyulmaz. Öncelikle projeksiyon koordinatları hesaplanır. Problem düzlemde çözümlür ve elde edilen düzlem hesap sonuçlarından indirgemelerle küresel karşılıklarına geçilir. İşlem adımları aşağıda açıklanmıştır.

1) Projeksiyon koordinatları hesaplanır.

$$\begin{aligned}x_1 &= X_1 & y_1 &= R \operatorname{arctanh}\left(\sin \frac{Y_1}{R}\right) \\x_2 &= X_2 & y_2 &= R \operatorname{arctanh}\left(\sin \frac{Y_2}{R}\right)\end{aligned}$$

2) Düzlemde II. temel problem çözümü yapılır.

$$\begin{aligned}\Delta x &= x_2 - x_1 & \Delta y &= y_2 - y_1 \\t_1 &= \arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) & s &= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \\t_2 &= t_1 \pm \pi\end{aligned}$$

3) İndirgemelerle küresel S, T₁ ve T₂ değerlerine geçilir.

$$\begin{aligned}S &= s - \frac{s}{6R^2}(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) \\T_1 &= t_1 + \frac{\rho''}{6R^2} \Delta x (2y_1 + y_2) \\T_2 &= t_2 + \frac{\rho''}{6R^2} \Delta x (y_1 + 2y_2)\end{aligned}$$

Örnek:

Verilenler:

$$\begin{aligned}X_1 &= -92276.440 \text{ m} & X_2 &= -9251.405 \text{ m} \\Y_1 &= 82130.142 \text{ m} & Y_2 &= 17106.096 \text{ m} \\R &= 6373924.115 \text{ m}\end{aligned}$$

$$x_1 = X_1 = -92276.440 \text{ m}$$

$$y_1 = R \arctan h \left(\sin \frac{Y_1}{R} \right) = 82132.415 \text{ m}$$

$$x_2 = X_2 = -9251.405 \text{ m}$$

$$y_2 = R \arctan h \left(\sin \frac{Y_2}{R} \right) = 17106.116 \text{ m}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad \Delta y = y_2 - y_1$$

$$t_1 = \arctan \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = 321^\circ 55' 53.35''$$

$$s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 105458.883 \text{ m}$$

$$t_2 = t_1 + \pi = 141^\circ 55' 53.35''$$

$$S = s - \frac{s}{6R^2} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)$$

$$S = s - 3.653 \text{ m} = 105455.230 \text{ m}$$

$$T_1 = t_1 + \frac{\rho''}{6R^2} \Delta x (2y_1 + y_2) = t_1 + 12.74'' = 321^\circ 56' 06.09''$$

$$T_2 = t_2 + \frac{\rho''}{6R^2} \Delta x (y_1 + 2y_2) = t_2 - 8.17'' = 141^\circ 55' 45.18''$$

5.5. Ordinat Koruyan ve Gauss-Krüger Projeksiyonların Karşılaştırılması

Küresel dik koordinatlardan hareket edildiğinde ordinat koruyan projeksiyon büyük kolaylık sağlar. Çünkü küresel dik koordinatlarla projeksiyon koordinatları aynı sayısal değerlere eşittir. Bu kolaylık sebebiyle ordinat koruyan projeksiyon geçen yüzyılda geniş kullanım alanı bulmuştur. İndirgemeler açısından karşılaştırıldığında durum şöyledir [16]:

Uzunluk İndirgemesi

$$\text{Ordinat koruyan projeksiyonda; } S - s = -\frac{s}{6R^2} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) \cos^2 t_1$$

$$\text{Gauss- Krüger projeksiyonunda; } S - s = -\frac{S}{6R^2}(y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2)$$

Görüldüğü gibi her iki formülün yapısı da aynı fakat Gauss-Krüger projeksiyonunda $\cos^2 t$ çarpanı yoktur. Bu demektir ki Gauss-Krüger projeksiyonundaki uzunluk indirgemesi her zaman için ordinat koruyan projeksiyonundakinin maksimumudur. Buna karşılık Gauss-Krüger projeksiyonunda uzunluk indirgemesi doğrultudan bağımsız olduğu için daha basit şekilde hesaplanır.

1 km'lik bir küresel kenar Gauss- Krüger projeksiyonunda,

$$y = 90 \text{ km için } \rightarrow 10 \text{ cm}$$

$$y = 125 \text{ km için } \rightarrow 20 \text{ cm}$$

$$y = 200 \text{ km için } \rightarrow 50 \text{ cm uzamış olur.}$$

Alan İndirgemesi

$$\text{Ordinat koruyan projeksiyonda; } F - f = -\frac{f}{6R^2}(y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2)$$

$$\text{Gauss- Krüger projeksiyonunda; } F - f = -\frac{f}{3R^2}(y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2)$$

Formüllerden görüldüğü gibi ordinat koruyan projeksiyondaki alan indirgemesi Gauss-Krüger projeksiyonundakinin yarısı kadardır. Ancak her iki projeksiyonda da bu indirgeme büyüklükleri kabul edilen hata sınırlarının altında kalır. Bu sebepten dolayı sadece çok büyük alanların hesabında bu indirgemeler dikkate alınır.

Doğrultu İndirgemesi

Ordinat koruyan projeksiyonda;

$$T_1 - t_1 = \frac{\rho''}{6R^2} \Delta x (2y_1 + y_2) + \frac{\rho''}{6R^2} (y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2) \sin t_1 \cos t_1$$

Gauss- Krüger projeksiyonunda;

$$T_1 - t_1 = \frac{\rho''}{6R^2} \Delta x (2y_1 + y_2)$$

görüldüğü gibi ordinat koruyan projeksiyonda büyük değer ikinci terimdedir. Gauss-Krüger projeksiyonunda bu terim yoktur. O halde Gauss- Krüger projeksiyonunda doğrultu indirgemesi özellikle kısa kenarlarda daha küçük olmaktadır.

Kürede I. jeodezik temel problemlerin hem ordinat koruyan hem de Gauss-Krüger projeksiyonla çözümünde küresel sonuçlar yani P_2 noktasının küresel dik koordinatları ve T_2 semti her iki yöntemde aynı olup,

$$X_2 = -9251.405 \text{ m}$$

$$Y_2 = 17106.096 \text{ m}$$

$$T_2 = 141^{\circ} 55' 45.18''$$

değerleri bulunmuştur. Fakat hesap adımları içinde ara değerleri her iki projeksiyon türündeki düzlem s , y_2 , t_1 ve t_2 değerleri farklıdır. Çünkü bu düzlem değerlerin karşılıkları ile ilişkilerini sağlayan indirgeme formülleri farklıdır. Değerler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

	Ordinat koruyan projeksiyon	Gauss- Krüger projeksiyon
s	105457.494 m	105458.883 m
t_1	321 ^o 55' 56.82''	321 ^o 55' 53.55''
y_2	17106.096 m	17106.116 m
x_2	Her ikisinde de aynıdır ($x = X$)	

KAYNAKLAR

- [1]- Aksoy, A; Güneş, İ.H.: (1990): “Jeodezi I-II”, İTÜ yayınları, Yayın No:1421, İstanbul
- [2]- Aksoy, A. (1999): “Jeodezide Değişimler”, HKMO Dergisi, sayı: 86, s: 40-60, Ankara
- [3]- Bektaş, S. (1991): “Üç Boyutlu Geometrik Modelle Yerkabuğu Hareketlerinin Araştırılması”, KTÜ-FBE Doktora tezi, Trabzon
- [4]- Bektaş, S. (2001): “Matematik Jeodezi”, Kamer Matbaa Yayıncılık, Samsun
- [7]- Bektaş, S. (2004): “Jeodezik Hesap-Düzlemde ve Küre Yüzeyinde Jeodezik Hesaplamalar”, OMÜ yayınları, Yayın no:120,Samsun
- [8]- Bektaş, S. (2004):”Dengeleme Hesabı”, OMÜ yayınları, Yayın no:118, Samsun
- [9]- BÖHYİ (1992): “Açıklamalı-Örnekleme Büyük Ölçekli Haritalar Yapım Yönetmeliği”, TMMOB-HKMO İstanbul Şubesi, İstanbul
- [10]- Demirkol, E.Ö; Gürdal, M.A; Yıldırım, A: “Avrupa Datumu (ED50) ile Dünya Jeodezik Sistemi (WGS84) Arasında Datum Dönüşümü ve Askeri Uygulamaları” HGK, Ankara
- [11] Grossmann, W. (1964): “Geodatische Rechnungen und Abbildungen in der Landesvermessung”, Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart 1964
- [12]- Gürkan, O. (1984): “Fiziksel Jeodezi”, KTÜ Yayınları, Yayın No: 19, Trabzon
- [13]- Hristow, W.K. (1943): “Die Gauss-Krüger’schen Koordinaten auf dem Ellipsoid”, Berlin
- [15]- Kahveci, M., Yıldız, F. (2001): “GPS-Global Konum Belirleme Sistemi”, Nobel Yayın Dağıtım, Yayın No: 224, Konya
- [16]- Kaya, A. (1999): “Jeodezi-II”, KTÜ Yayınları, Yayın No: 195, Trabzon
- [17]- Koçak, E.(1985): “Kartoğrafya”, KTÜ yayınları, yayın no:31,Trabzon
- [18]- Koçak, E.(1999): “Harita Projeksiyonları”, ZKÜ Yayınları, Yayın No:10,Zonguldak
- [19]- Lenk, O; Fırat,O: “Avrupa Datumu 1950 (ED50) ile Türkiye Ulusal Temel GPS Ağı (TUTGA-99) Arasında Datum Dönüşümü” HGK, Ankara
- [20]- Özbenli, E. (1991): “Jeodezi”, KTÜ Yayınları, Yayın No: 154, Trabzon
- [25]- Şerbetçi, M. (1979): “İlk Çağlardan Günümüze Kadar Yerin Biçimi ve Büyüklüğü”, KTÜ yayınları, Yayın no: 101, Trabzon

- [28]- Ünal, T (1982): “Jeodezi-I Ders Notları” yayınlanmadı
- [29]- Yaşayan, A., Hekimoğlu, Ş. (1982): “Küresel Trigonometri”, KTÜ yayınları, Yayın no: 143/122, Trabzon
- [30]- Cuenin, R. (1972): “Cartographie Generale- Tome I”, Institut Géographique National, Paris 1972
- [31]- Bektaş, S. (2019): “Direct bearing angles determination on globe”, *MOJ Civil Engineering*, vol. 5, no. 4, pp. 78–80, Dec. 2019.
- [32]- Bektaş, S (2016) “Generalized Euler Formula For Curvature”, *International Journal of Research in Engineering and Applied Sciences*, Volume 6, Issue 3 (March, 2016) (ISSN 2249-3905)

